

ОЦЕНКА НА РИСКА В МУЛТИАКТИВЕН ПОРТФЕЙЛ ОТ АКЦИИ

Един от начините за намаляване на риска в инвестициите е диверсификацията. Това означава капиталите не само да се разпределят в голям брой инвестиционни носители, но те бъдат и подходящо подбрани. Редица примери (теоретични и от практиката) показват, че невинаги може да се създаде портфейл, на който рискът да е по-малък, отколкото рисковете на съставлящите го активи. В разработката са формулирани и доказани условия за връзката между коефициентите на корелация и рисковете на активите. Когато тези условия са в сила не е възможно да бъде създаден портфейл между тях с риск, по-малък от индивидуалните рискове на съставлящите го активи. Дават се и такива условия, при наличието на които винаги е възможно да бъде създаден портфейл с минимален риск. За демонстриране приложението на получените резултати са изследвани възможностите за създаване на подходящи портфейли от акциите на десет сред най-котираните компании на Българската фондова борса (БФБ).

JEL: C61; D 81; G11

Финансовите инвестиции се отнасят към тази сфера на човешката дейност, където като правило присъства *неопределеността*, засягаща бъдещото благосъстояние на хората и компаниите. В този контекст неопределеността се разглежда като риск и в зависимост от конкретните условия и обстоятелства се говори за предразположение към риск (risk exposure). Активността на стопанските субекти и техните структури е насочена към увеличаване на очакваната полезност, което поражда необходимост от измерване на инвестиционния риск. Комплексът от целенасочени действия, целящи намаляването на риска, образува процеса на управлението му. Като съставка на този процес, целяща минимизирането на риска е диверсификацията. Тя се базира на разпределение на капитала не в един, а в няколко инвестиционни носители. Това доведе до създаване и успешно прилагане в практиката на теорията на портфейла. В основата на съвременната модерна теория на портфейла² стои принципът на "ефективната диверсификация" – инвеститорът не просто да диверсифицира, а да разпределя капитала си в точно определени инвестиционни носители. Едни от важните задачи, които трябва да решава всеки инвеститор са:

- Създаване на ефективен портфейл – такъв, който при зададено равнище на риска дава най-голяма възвръщаемост, или при зададено равнище на възвръщаемостта има най-малък риск.

¹ Росен Николаев е гл. ас. в Икономически Университет – Варна, Катедра "Математически науки", тел.: 052 660450, e-mail: nikolaev_rosen@hotmail.com.

² Markowitz, Harry M. Portfolio Selection, Journal of Finance, III, 1952.

- Създаване на оптимален портфейл – такъв, който дава или най-малък риск, или има най-малък риск за единица възвръщаемост. Последното се измерва чрез коефициента на вариация на портфейла.

В теорията на портфейла съществува схващането, че когато броят на активите в него е голям и коефициентите на корелация между тях, ако са по-малки от единица, то може да се постигне риск по-малък от индивидуалните рискове на активите.³

В редица случаи от практиката се оказва, че това не винаги може да бъде постигнато. Възниква въпросът: каква трябва да е степента на взаимодействие между активите, за да се постигне ефекта на диверсификация?

В предишна разработка⁴ сме намерили условия, при които портфейлният риск в двуактивен портфейл може да бъде по-малък от индивидуалните рискове на активите.

Целта на тази разработка е това да бъде направено за мултиактивен портфейл. При някои предположения за съвкупността от активи извеждаме условие, при което портфейлният риск не може да се намали, при каквито и да е пропорции на инвестиране в отделните активи. Резултатите сме илюстрирали с пример.

Във втората част разглеждаме част от най-котираните акции на Българска фондова борса (БФБ). Сред тях определяме съвкупностите от компании, за които не съществува оптимален портфейл по отношение на риска. Дадени са и условия, при наличието на които може да бъде създаден оптимален портфейл. Изведени са подсъвкупности от компании, сред които може да се създаде оптимален портфейл. Решени са минимизационни задачи за три различни портфейла, чрез които се потвърждава направения извод, че не е необходимо да се търси оптимален портфейл, в който са включени всички компании.

1. Условие за несъществуване на оптимален мултиактивен портфейл

Понятието „оптимален портфейл“ може да бъде разгледано от различни аспекти. Тук под оптимален мултиактивен портфейл ще разбираме такъв, чийто риск е строго по-малък от рисковете на съставляващите го активи.

Нека разгледаме акциите на n на брой компании. Означаваме с $\bar{r}_i (i = 1, n)$ и $\sigma_i (i = 1, n)$ съответно техните очаквани (средни) възвръщаемости и стандартните отклонения. Със стандартното отклонение (σ) отъждествяваме риска на съответната акция. С $\rho_{ij} (i, j = 1, n, i < j)$ означаваме коефициентите на корелация между всеки

³ Боди, З. и др. Инвестиции, С., Натурела, 2000; Шарп, У. и др. Инвестиции, Москва, Инфра – М, 1999.

⁴ Николаев, Р., „Определяне коефициента на корелация в двуактивен портфейл за постигане на ефекта на диверсификация“, Известия на СУ - Варна, 2/2000г., 1/2001г., с. 37 – 39.

две акции. Номерацията на акциите приемаме такава, с оглед да бъдат подредени по големината на σ_i ($i = \overline{1, n}$) във възходящ ред, т.е.

$$(1) \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \dots \leq \sigma_n,$$

като поне едно от неравенствата е строго⁵ и $\sigma_1 > 0$.

Нека с x_i ($i = \overline{1, n}$) означим частта от целия капитал, която инвеститорът влага в закупуването на акции от i -ия вид. Очевидно е, че $x_i \geq 0$ ($i = \overline{1, n}$) и сумата им е равна на единица. От теорията на портфейла са известни формулите за пресмятане на очакваната портфейлна възвръщаемост и портфейлният риск:

$$(2) \bar{r}_p = \sum_{i=1}^n x_i \bar{r}_i,$$

$$(3) \sigma_p = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \right]^{1/2}.$$

Формула (3) може да се запише и във вида:

$$(3') \quad \sigma_p = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^n x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \right]^{1/2}$$

Съществуването на оптимален портфейл означава да се намерят такива x_i ($i = \overline{1, n}$): $x_i \in [0, 1]$ и $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, така че рискът на портфейла да е строго по-малък от най-малкия риск, т.е.

$$\sigma_p < \sigma_1.$$

Сега ще покажем, че ако за всички коефициенти на корелация е изпълнено неравенството

$$(4) \rho_{ij} \geq \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \quad (i < j),$$

то такъв портфейл не съществува.

Като вземем предвид формула (3') след повдигане в квадрат на двете страни

и като разделим на σ_1^2 получаваме:

$$(5) \frac{\sigma_p^2}{\sigma_1^2} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \frac{\sigma_i^2}{\sigma_1^2} + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^n x_i x_j \rho_{ij} \frac{\sigma_i \sigma_j}{\sigma_1^2}$$

⁵ Ако $\sigma_i = \sigma_j$ за всяко i и всяко j , то случаят е тривиален и не предствалява интерес.

От подредбата (1) следва, че

$$(6) \frac{\sigma_i^2}{\sigma_1^2} \geq 1 \text{ за всички } i = \overline{1, n},$$

като поне за едно i неравенството е строго. Като имаме предвид неравенствата (4) и (6) и заместим ρ_{ij} със $\frac{\sigma_i}{\sigma_j}$ и $\frac{\sigma_i^2}{\sigma_1^2}$ с 1 в (5) получаваме неравенството

$$\frac{\sigma_p^2}{\sigma_1^2} \geq \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^n x_i x_j = \left[\sum_{i=1}^n x_i \right]^2 = 1$$

Оттук имаме

$$(7) \sigma_p \geq \sigma_1,$$

като равенство се получава при $x_1 = 1$ и $x_i = 0$ ($i = \overline{2, n}$).

От това следва, че ако всички коефициенти на корелация са по-големи или равни на по-малкото отношение между рисковете на всеки два актива, то при каквито и да е пропорции на инвестиране в отделните активи, портфейлният риск не може да бъде по-малък от най-малкия индивидуален риск, т.е. не съществува оптимален портфейл.

За онагледяване и илюстриране на получения резултат ще разгледаме един пример при $n = 3$. Нека за акциите на три компании сме пресметнали рисковете и коефициентите им на корелация.

$$\sigma_1 = 2\%, \sigma_2 = 3\%, \sigma_3 = 4\%, \\ \rho_{12} = 0,7, \rho_{13} = 0,6, \rho_{23} = 0,8.$$

Поставяме задачата, при какви части от общия капитал, инвестирани в отделните компании може да се получи портфейл, чиито риск да е най-малък. Така получаваме една задача на квадратичното оптимиране:

$$(8) \quad \min: \sigma_p^2 = 4x_1^2 + 9x_2^2 + 16x_3^2 + 8,4x_1x_2 + 4,8x_1x_3 + 9,6x_2x_3$$

при ограничителни условия:

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}$$

Задача (8) може да бъде решена по аналитичен или числен метод, но решението ѝ ще бъде $\min(\sigma_p^2) = 4$ при $x_{\min} = (1, 0, 0)$. И наистина, тъй като

$$\rho_{12} > \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (0,7 > \frac{2}{3}),$$

$$\rho_{13} > \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \quad (0,6 > \frac{2}{4}),$$

$$\rho_{23} > \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \left(0,8 > \frac{3}{4}\right),$$

то условия (4) са изпълнени и от доказаното по-горе следва, че не съществува оптимален портфейл.

Самото решаване на задача (8) изисква големи по обем работа и време. Този обем значително нараства при повече, т.е. при по-голям брой компании.

Полученият резултат показва, че когато за една съвкупност от активи са в сила условия (4), не е необходимо да се решава задача за намиране на портфейл с минимален риск, тъй като той не съществува.

2. Оптимизиране на портфейл от акции на БФБ

Тук ще разгледаме част от компаниите, чиите акции се търгуват на БФБ. Подбрали сме десет от тях (вж. приложение 1), чиито обеми на продажби за разглеждания период са най-големи и постоянни. Разглеждаме средноседмичните им цени за периода от 14.10.2002г. до 07.03.2003 г. (вж. приложение 2). Така се получават 19 изходни данни, а е известно, че когато един ред има между 15 и 20 члена може да бъде направена една добра статистика.

На база средноседмичните цени сме пресметнали (в %) средноседмичните възвръщаемости (вж. табл. 1) по формулата:

$$(9) r_t = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \cdot 100, \quad t = \overline{1, 18},$$

където P_t е цената за периода t ;

r_t – възвръщаемостта за периода t .

Таблица 1
Средноседмични възвръщаемости на акциите (%) за периода
14.10.2002 – 07.03.2003г.

№	Седмици/Компании	ALBH	PETH	GAMZA	SFARM	LEV	NEFT	BTH	DOVUHL	ALB	ZLP
1	A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	14.X - 18.X. 2002	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2	21.X - 25.X. 2002	2,1583	-0,1427	-13,2143	5,1268	-0,2123	0,2442	0,0000	1,3917	5,4348	6,0268
3	28.X - 01.XI. 2002	4,2254	0,8571	10,9465	3,9853	0,2128	-0,2436	0,5579	1,1765	2,6804	5,8947
4	04.XI - 08.XI. 2002	2,0270	-0,8499	-5,7864	5,4261	-0,1062	3,1746	4,9633	0,7752	8,8353	13,9165
5	11.XI - 15.XI. 2002	1,3245	0,1429	-3,3465	5,4004	-0,8714	-2,4852	3,8286	2,3077	8,2165	21,4660
6	18.XI - 22.XI. 2002	0,0000	-0,1427	7,5356	-0,3631	-0,1715	-2,3058	-3,6874	3,1955	-0,5740	1,0057
7	25.XI - 29.XI. 2002	2,6144	0,1429	-9,6212	4,0036	0,0859	2,7329	10,9143	-0,3643	13,7468	9,9573
8	02.XII - 06.XII. 2002	-0,6369	-12,2682	-4,1073	1,2700	-0,5150	-0,8464	5,5641	-0,5484	-0,5427	-3,2342
9	09.XII - 13.XII. 2002	-1,9231	-18,6992	-2,9720	1,8509	-0,2588	-1,5854	3,1967	-0,3676	9,5089	-11,7647
10	16.XII - 20.XII. 2002	-1,9608	0,4000	-7,2072	0,4586	-0,1730	-0,4957	-12,3670	-4,7970	-2,9990	1,3636
11	06.I - 10.I. 2003	2,0000	0,3984	-11,6505	4,5435	0,8666	0,0000	12,2947	-7,9457	7,3059	9,2676
12	13.I - 17.I. 2003	-1,3072	-0,7937	1,0989	5,0334	0,5155	1,2453	1,9190	5,4737	1,3830	-4,6512
13	20.I - 24.I. 2003	-0,6623	0,0000	-2,5000	9,8845	-0,1068	-2,5830	7,1201	3,7924	3,3403	5,1650
14	27.I - 31.I. 2003	0,6667	0,2000	2,2854	4,5818	1,1337	1,3889	10,7076	0,1923	7,7170	0,6821
15	03.II - 07.II. 2003	0,6623	1,3972	0,2725	-3,5772	0,0000	-0,7472	10,1392	0,5758	1,5711	-2,9810
16	10.II - 14.II. 2003	0,6579	-0,5906	2,1739	2,2440	-0,0846	0,5019	-5,3069	4,1985	6,7595	-4,8883
17	17.II - 21.II. 2003	5,8824	9,3069	3,1915	4,4506	0,5080	5,1186	4,4224	21,7949	5,5057	0,5874
18	24.II - 28.II. 2003	10,4938	8,6957	4,1237	3,2527	1,2005	4,6318	0,1825	16,6917	3,2546	3,0657
19	03.III - 07.III. 2003	1,1173	2,7083	-0,2475	18,8067	5,5151	6,0159	7,3433	-3,9948	9,7719	1,1331

Таблица 2

Средна възвръщаемост ($\bar{r}_i$), дисперсия (σ_i^2), риск (σ_i) и коефициент на вариация (V_i) на акциите за периода 14.10.2002 – 07.03.2003 г.

Характеристики/ Компании	ALBH	PETH	GAMZA	SFARM	LEV	NEFT	BTH	DOVUHL	ALB	ZLP
a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{r}_i$ (%)	1,5189	-0,5132	-1,6125	4,2433	0,4188	0,7645	3,4329	2,4193	5,0509	2,8896
σ_i^2	8,6149	37,2124	38,8771	20,2598	1,8077	6,4956	37,7214	46,2637	17,9252	55,8108
σ_i (%)	2,9351	6,1002	6,2352	4,5011	1,3445	2,5486	6,1418	6,8017	4,2338	7,4707
V_i	1,9324	-11,8869	-3,8668	1,0608	3,2104	3,3335	1,7891	2,8114	0,8382	2,5854

След обработката на възвръщаемостите, в табл. 2 сме изнесли основните характеристики за всеки вид акция за целия период, а именно:

- Средната възвръщаемост ($\bar{r}_i$);
- Дисперсията (σ_i^2);
- Рискът (σ_i);
- Коефициентът на вариация (V_i) за $i = \overline{1,10}$.

От данните в табл. 2 забелязваме, че възвръщаемостите на “Петрол Холдинг” АД и “Северкооп Гъмза Холдинг” АД са отрицателни. Поради това, те не представляват интерес за нас и ги изключваме от по-нататъшните изследвания. За отделните компании по-нататък ще използваме номерацията от таблица 3 вместо техните имена или кодове.

В табл. 3 е поместена корелационната матрица за оставащите осем компании, а в табл. 4 отношенията на рисковете между всеки две.

Таблица 3

Корелационна матрица на възвръщаемостите на акциите

Компания/ Компания	ALBH	SFARM	LEV	NEFT	BTH	DOVUHL	ALB	ZLP
a	1	2	3	4	5	6	7	8
ALBH	1	0,061800	0,177242	0,592087	0,094268	0,647238	0,162371	0,296309
SFARM	0,061800	1	0,753232	0,460643	0,271577	-0,089182	0,445471	0,240942
LEV	0,177242	0,753232	1	0,669795	0,247777	-0,092793	0,276401	-0,112481
NEFT	0,592087	0,460643	0,669795	1	0,176870	0,392107	0,373944	0,006768
BTH	0,094268	0,271577	0,247777	0,176870	1	-0,134700	0,549010	0,199519
DOVUHL	0,647238	-0,089182	-0,092793	0,392107	-0,134700	1	-0,098089	-0,101913
ALB	0,162371	0,445471	0,276401	0,373944	0,549010	-0,098089	1	0,311999
ZLP	0,296309	0,240942	-0,112481	0,006768	0,199519	-0,101913	0,311999	1

Таблица 4

Отношения между стандартните отклонения на възвръщаемостите на акциите (σ_i / σ_j)

Стандартни отклонения	σ_{ALBH}	σ_{SFARM}	σ_{LEV}	σ_{NEFT}	σ_{BTH}	σ_{DOVUHL}	σ_{ALB}	σ_{ZLP}
a	1	2	3	4	5	6	7	8
σ_{ALBH}	1	0,652089	2,183024	1,151638	0,477892	0,431523	0,693254	0,392884
σ_{SFARM}	1,533533	1	3,347740	1,766075	0,732863	0,661755	1,063128	0,602501
σ_{LEV}	0,458080	0,298709	1	0,527542	0,218913	0,197672	0,317566	0,179973
σ_{NEFT}	0,868329	0,566228	1,895582	1	0,414967	0,374704	0,601972	0,341153
σ_{BTH}	2,092522	1,364511	4,568026	2,409828	1	0,902971	1,450649	0,822120
σ_{DOVUHL}	2,317374	1,511134	5,058882	2,668775	1,107455	1	1,606528	0,910460
σ_{ALB}	1,442473	0,940621	3,148954	1,661207	0,689347	0,622460	1	0,566725
σ_{ZLP}	2,545277	1,659747	5,556402	2,931237	1,216368	1,098346	1,764523	1

С цел проверка на условие (4), табл. 3 и табл. 4 са сравнени като тествахме верността на неравенството

$$(10) \rho_{ij} < \min \left\{ \frac{\sigma_i}{\sigma_j}, \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \right\}; i = \overline{1,8}, j = \overline{1,8}.$$

Резултатите са поместени в таблица 5.

Таблица 5

Тестване на условието $\rho_{ij} < \min \left\{ \frac{\sigma_i}{\sigma_j}; \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \right\}$ между акциите

Компании	ALBH	SFARM	LEV	NEFT	BTH	DOVUHL	ALB	ZLP
ALBH	Не	Да	Да	Да	Да	Не	Да	Да
SFARM	Да	Не	Не	Да	Да	Да	Да	Да
LEV	Да	Не	Не	Не	Не	Да	Да	Да
NEFT	Да	Да	Не	Не	Да	Не	Да	Да
BTH	Да	Да	Не	Да	Не	Да	Да	Да
DOVUHL	Не	Да	Да	Не	Да	Не	Да	Да
ALB	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Не	Да
ZLP	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Не

В полетата, в които има “Не” следва, че неравенство (10) не е вярно, т.е. изпълнено е обратното неравенство

$$(11) \rho_{ij} \geq \min \left\{ \frac{\sigma_i}{\sigma_j}, \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \right\}; i = \overline{1,8}, j = \overline{1,8},$$

което е идентично с неравенство (4).

Това показва, че за тези двойки компании е изпълнено условие (4).

Виждаме, че оптимален портфейл не съществува за следните двойки компании (1,6); (2,3); (3,4); (3,5); (4,6). Да се инвестира в закупуване на акции с цел намаляване на риска, в който и да е двуактивен портфейл от посочените няма да доведе до постигане на тази цел.

Нека разгледаме компаниите между всеки две, сред които е нарушено условие (4), т.е. е изпълнено (10). Излизайки от резултатите в [4] между всеки две от тях съществува оптимален портфейл според критерия за минимизиране на риска.

Това можем да твърдим и за следните съвкупности от компании (вж. табл. 5), между всеки две, от които резултатът от тестването е “Да”:

(12) (1,2,4,5,7,8); (1,3,6,7,8); (2,5,6,7,8).

Разбира се, това можем да твърдим и за всяка тяхна подсъвкупност.

Вземаме за пример най-голямата от шестте компании (1,2,4,5,7,8). Между всеки две от тях е изпълнено условие (10). Тогава между всеки две съществува такъв портфейл, че рискът да се получи по-малък от рисковете на отделните два [4]. Това от табл. 2 са компаниите 1, 4, 6, 7, 9 и 10. С най-малък риск от тях е 6 (NEFT), който е 2,5486 % (вж. табл. 2). Между тази компания и която и да е от останалите пет, може да се създаде портфейл, чийто риск ще е по-малък от 2,5486 %. Между тях може да се реши задача

като (8) за намиране на най-малкия портфейлен риск. Това се отнася и за останалите две съвкупности от активи.

Нека сега подробно се спрем на съвкупността от компаниите 1, 2, 4, 5, 7 и 8 (табл. 6).

Таблица 6

Характеристики на компаниите, между които съществува оптимален портфейл

Компании	$\bar{r}_i$	σ_i
ALBH	1,52	2,94
SFARM	4,24	4,50
NEFT	0,76	2,55
BTH	3,43	6,14
ALB	5,05	4,23
ZLP	2,89	7,47

Вече казахме, че резултатът от тестването между всеки две от тези компании е “Да” и бихме могли да твърдим, че може да бъде създаден шестакивен портфейл, който да бъде оптимален, т.е. чиито риск ще бъде по-малък от 2,55 %, който е най-малкият (на NEFT) от индивидуалните рискове.

Преди това ще разгледаме дваактивния портфейл между компаниите с най-малки рискове. Това са ALBH и NEFT.

Ще решим следната минимизационна задача:

$$(13) \quad \min: \sigma_p^2 = \sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2 (1-x)^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}x(1-x),$$

при ограничителни условия:

$$0 \leq x \leq 1.$$

$$\sigma_1 = \sigma_{ALBH} = 2,94,$$

$$\sigma_2 = \sigma_{NEFT} = 2,55,$$

$$\rho_{12} = \rho_{ALBH,NEFT} = 0,59.$$

Преди това ще уточним, че решението на тази задача ще даде портфейлен риск, който е по-малък от 2,55, което следва от резултатите в [4].

Задачата решаваме с помощта на SOLVER на MS EXCEL. Резултатите са следните:

$$x^0 = 0,332,$$

$$1 - x^0 = 0,668,$$

$$\sigma_p = 2,41\%.$$

Това дава, че ако в ALBH се инвестира 33,2 % от общия капитал, а в NEFT -66,8 % от капитала ще се получи най-малкия риск на този дваактивен портфейл и той е 2,41 %, който е по-малък от рисковете и на двете компании. За този риск ще съответства очаквана портфейлна възвръщаемост

$$\bar{r}_p = 0,332 \cdot 1,52 + 0,668 \cdot 0,76 = 1,01\%,$$

която от своя страна е по-голяма от 0,76 % (възвръщаемостта на компанията с по-малкия риск – NEFT).

От казаното, при съставяне на шестактивния портфейл, минималният му риск ще бъде най-много минималният риск на този дваактивен портфейл и това ще се получи при

$$x^0 = (0,332; 0; 0,668; 0; 0; 0).$$

За да разберем дали може да е по-малък ще решим задачата за намиране на минимума на риска на шестактивния портфейл.

Разглеждаме вектора

$$x\sigma = (x_1\sigma_1, x_2\sigma_2, \dots, x_6\sigma_6)$$

и корелационната матрица на тези шест компании.

$$Ro = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,06 & 0,59 & 0,09 & 0,16 & 0,30 \\ 0,06 & 1,00 & 0,46 & 0,27 & 0,45 & 0,24 \\ 0,59 & 0,46 & 1,00 & 0,18 & 0,37 & 0,01 \\ 0,09 & 0,27 & 0,18 & 1,00 & 0,55 & 0,20 \\ 0,16 & 0,45 & 0,34 & 0,55 & 1,00 & 0,31 \\ 0,30 & 0,24 & 0,01 & 0,20 & 0,31 & 1,00 \end{pmatrix}$$

Тогава

$$\sigma_p^2 = (x\sigma).Ro.(x\sigma)^T.$$

Ще решим задачата

$$(14) \quad \min: \sigma_p^2 = \min : (x\sigma).Ro.(x\sigma)^T,$$

при ограничителни условия:

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 1,$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{1,6}.$$

Задачата решаваме чрез SOLVER на MS EXCEL. Резултатите за стойностите на x_i ($i = \overline{1,6}$) са поместени в табл. 7. Те дават частите от общия капитал, който приемаме за единица, инвестирани в отделните компании, при които се получава минималния портфейлен риск.

При така определените пропорции се получава минималния риск, който е $\sigma_p = 2,29\%$, а за него съответства очаквана портфейлна възвръщаемост $\bar{r}_p = 1,72\%$.

Това потвърждава предположението, че портфейлът между шестте компании, между всеки две от които е изпълнено условие (10) може да бъде такъв, че рискът му да е по-малък от рисковете на съставлящите го активи. При това този риск е по-малък, отколкото ако инвестирането е само в двете компании с най-малки рискове, който е 2,41%.

Таблица 7

Пропорции на инвестициите в оптималния портфейл

Компании	x_i^0
ALBH	0,313
SFARM	0,063
NEFT	0,479
BTH	0,041
ALB	0,078
ZLP	0,026

За да потвърдим, че не е необходимо да се инвестира осемте компании, а само в някои от съвкупностите (12), ще разгледаме портфейла от всички тях.

Рисковете им вземаме от табл. 2 (без тези на PETH и GAMZA) и матрицата Ro, която съответства на данните от табл. 3. Разглеждаме следната задача:

$$(15) \quad \min: \sigma_p^2 = \min: (x\sigma).Ro.(x\sigma)^T,$$

при ограничителни условия:

$$\sum_{i=1}^8 x_i = 1,$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{1,8}.$$

Резултатите, след решаване на EXCEL показват, че пропорциите на инвестиране в оптималния портфейл са следните: $x^0 = (0;0;0,895;0;0;0,055;0;0,05)$, т.е. в LEV – 89,5%, в DOVUHL – 5,5% и в ZLP – 5%, а в останалите компании нула процента от общия капитал. За минималния портфейлен риск се получава $\sigma_p = 1,23\%$ и за него съответства очаквана портфейлна възвръщаемост $\bar{r}_p = 0,644\%$. Какви изводи можем да направим въз основа на тези получени резултати?

1. Рискът е с 1,06% по-малък от минималния в предходния шестакивен портфейл.

2. Очакваната възвръщаемост е 0,644%, която е с 1,076% по-малка от тази в шестакивния портфейл.
3. На практика последния не е между всичките осем компании, а само между три от тях.

Този резултат не е неочакван, тъй като от табл. 3 виждаме, че и трите компании са отрицателно корелирани помежду си и е нормално да бъде постигнат много по-малък риск, отколкото между преди това разглежданите шест компании, между всеки две от които коефициентът на корелация е положителен.

На второ място, в потвърждение на получените теоретични резултати в работата е фактът, че тези три компании са част от втората съвкупност в (12) (3,7 и 8), за която сме казали, че е уместно да се портфейлира. До същият резултат се стига и ако се разгледа само този петактивен портфейл.

На трето място, което според нас е най-показателно, е фактът, че този портфейлен риск (1,23%), макар и почти два пъти по-малък от риска на шестакивния портфейл (2,29%), не е толкова добър, ако отчетем и резултатите за очакваните възвръщаемости на шест- и осемакивния портфейли. Нека разгледаме коефициентите на вариация на двата портфейла, т.е. рискът, който съответства на единица очаквана възвръщаемост:

$$V_6 = \frac{\sigma_p}{\bar{r}_p} = \frac{2,29}{1,72} = 1,33;$$

$$V_8 = \frac{\sigma_p}{\bar{r}_p} = \frac{1,23}{0,644} = 1,91.$$

Резултатът показва, че на един процент възвръщаемост в шестакивния портфейл съответства с 0,58 % по-малък риск, отколкото в осемакивния.

Този анализ потвърждава направените вече изводи, че не е необходимо да се инвестира в цялата съвкупност от компании, а само в някоя от съвкупностите (12).

Получените резултати и изследванията показват, че когато между някакво множество от компании са налице условия (4), с цел да не се губят време и средства, не е необходимо да се решава съответната оптимизационна задача. Трябва да се търсят възможности за включване на нови активи към множеството, такива че не за всеки два в новополучената съвкупност от активи да са изпълнени условия (4). Тогава е възможно да съществува портфейл, чиито риск да е по-малък от рисковете на отделните активи в новополученото множество.

Приложение 1

Наименования на компаниите и техните кодове, използвани на БФБ

№	Наименования на компаниите	Код на БФБ
1	Албена Инвест Холдинг АД	ALBH
2	Петрол Холдинг АД	PETH
3	Северкооп Гъмза Холдинг АД	GAMZA
4	Софарма АД	SFARM
5	ИД Златен лев АД	LEV
6	Лук Ойл Нефтохим АД	NEFT
7	Булгартабак Холдинг АД	BTH
8	Доверие Обединен Холдинг АД	DOVUHL
9	Албена АД	ALB
10	Златни пясъци АД	ZLP

Приложение 2

Седмични данни за борсовата търговия за периода 14. X. 2002 г. – 07. III.

2003г. (в лева)

№	Седмици/Компании	ALBH	PETH	GAMZA	SFARM	LEV	NEFT	BTH	DOVUHL	ALB	ZLP
	а	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	14.X - 18.X. 2002	1,39	1,40	1,40	9,07	2,36	8,19	16,58	1,01	6,90	4,48
2	21.X - 25.X. 2002	1,42	1,40	1,22	9,54	2,35	8,21	16,58	1,02	7,28	4,75
3	28.X - 01.XI. 2002	1,48	1,41	1,35	9,92	2,36	8,19	16,67	1,03	7,47	5,03
4	04.XI - 08.XI. 2002	1,51	1,40	1,27	10,45	2,35	8,45	17,50	1,04	8,13	5,73
5	11.XI - 15.XI. 2002	1,53	1,40	1,23	11,02	2,33	8,24	18,17	1,06	8,80	6,96
6	18.XI - 22.XI. 2002	1,53	1,40	1,32	10,98	2,33	8,05	17,50	1,10	8,75	7,03
7	25.XI - 29.XI. 2002	1,57	1,40	1,19	11,42	2,33	8,27	19,41	1,09	9,95	7,73
8	02.XII - 06.XII. 2002	1,56	1,23	1,14	11,56	2,32	8,20	20,49	1,09	9,90	7,48
9	09.XII - 13.XII. 2002	1,53	1,00	1,11	11,78	2,31	8,07	21,15	1,08	10,84	6,60
10	16.XII - 20.XII. 2002	1,50	1,00	1,03	11,83	2,91	8,03	18,53	1,03	10,51	6,69
11	06.I - 10.I. 2003	1,53	1,01	0,91	12,37	2,33	8,03	20,81	0,95	11,28	7,31
12	13.I - 17.I. 2003	1,51	1,00	0,92	12,99	2,34	8,13	21,21	1,00	11,44	6,97
13	20.I - 24.I. 2003	1,50	1,00	0,90	14,27	2,34	7,92	22,72	1,04	11,82	7,33
14	27.I - 31.I. 2003	1,51	1,00	0,92	14,93	2,36	8,03	25,15	1,04	12,73	7,38
15	03.II - 07.II. 2003	1,52	1,02	0,92	14,39	2,36	7,97	27,70	1,05	12,93	7,16
16	10.II - 14.II. 2003	1,53	1,01	0,94	14,72	3,36	8,01	26,23	1,09	13,80	6,81
17	17.II - 21.II. 2003	1,62	1,10	0,97	15,37	2,37	8,42	27,39	1,33	14,56	6,85
18	24.II - 28.II. 2003	1,79	1,20	1,01	15,87	2,40	8,81	27,44	1,55	15,04	7,06
19	03.III - 07.III. 2003	1,81	1,23	1,01	18,86	2,54	9,34	29,46	1,49	16,51	7,14

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Боди, З. и др., Инвестиции, С., Натурела, 2000.
2. Дочев, Д. Теория на риска, ИУ, Варна, 2001.
3. Драганов, Хр. и др. Управление на риска във фирмата, Свищов, 1993.
4. Николаев, Р. Определяне коефициента на корелация в дваактивен портфейл за постигане на ефекта на диверсификация, Известия на СУ – Варна, 2/2000, 1/2001, с. 37 – 39.
5. Пътев, П., “Управление на портфейли”, “Абагар”, В. Търново, 1996г.
6. Шарп, У. и др. Инвестиции, Москва, Инфра – М, 1999.
7. Markowitz, Harry M. Portfolio Selection, Journal of Finance, III, 1952.
8. Wagner, W. H. and S. C. Lan. The Effect of Diversification on Risk. – Financial Analysis Journal, XI – XII, 1971.