

## ЕДИН ПОДХОД ЗА АДТИВЕН ИНДЕКСЕН АНАЛИЗ

Представен е един нов подход за провеждане на адитивен индексен факторен анализ. Новото е, че при разлагането на общия прираст на резултативната величина на съответните частни субприрасти структурната характеристика на екстензивния фактор се залага в *явен вид*. Това приближава схемата на анализа до действителността, а обособяването на факторните субприрасти се извършва по-лесно и по-опростено, при един много по-ясен формален външен запис.

Проблемите при разлагането на общия прираст са дискутирани при двата вида тегла – базисни и отчетни. Посочени са и различията между двата начина на претегляне, както и връзките между тях. Изведените теоретични постановки са подкрепени с разработката на реален пример от българската демографска практика.

JEL: C43

В статията се дискутира един частен проблем на индексния анализ. Разисква се идеята за по-различен подход при провеждане на адитивния индексен факторен анализ. Става въпрос за случая, когато съвкупността е еднородна, а резултативната величина се представя като сума от произведенията на факторните величини.<sup>1</sup>

Основната идея тук е още при разлагането на общия прираст на резултативната величина да се заложи в *явен вид* и структурните величини на екстензивния фактор. Непосредственият резултат от това е по-опростената детайлизация на отделните субприрасти, свързана с увеличаване броя на компонентите на общия прираст и техния по-опростен запис.<sup>2</sup> Това означава разширяване възможностите на анализа както от гледна точка на по-точното отграничаване на прирастите, така и по отношение на тяхното съдържателно разпознаване във връзка с пораздащите ги източници и посоката на факторното им влияние.

Известно е, че анализът може да се проведе от две изходни отправни точки: при *базисни* и при *отчетни тегла*.

При излагане на постановката си служим с проблем от демографската статистика. Да допуснем, че обект на изследването е прирастът на умиранията у нас между два последователни периода – базисен (2000 г.) и

---

<sup>1</sup>Идеята за този подход се зароди още през 1981 г. във връзка с ръководената от автора научна разработка за жизнения потенциал на населението в България (вж. Жизнен потенциал на населението в НР България. С., НИС при ВИИ "К. Маркс", 1982).

<sup>2</sup>Проф. Н. Величкова също се ангажира с необходимостта от увеличаване броя на факторните субприрасти. Методологическите подходи на двамата автори обаче са различни. Вж. *Величкова, Н.* Статистически методи за изучаване и прогнозиране на развитието на социално-икономическите явления. С., 1981, с.409. Аспекти на проблема се разглеждат и в *Гамев, К.* Въведение в статистиката. С., 1995, с. 370.

отчетен (2000 г.). Общият брой на умрелите през базисния период означаваме с  $M_0$ , а този през отчетния - с  $M_1$ . Приемаме още, че този брой се разглежда и анализира във връзка с един от най-важните демографски признаци – възрастта. Нейните значения са  $x = 0, 1, 2, \dots, \omega$ , където с  $\omega$  се бележи пределната възраст на доживяване.

В случая общият брой на умрелите е сума от умрелите по възраст, т.е. налице са равенствата  $M_0 = \sum_{x=0}^{\omega} M_{0,x}$  през базисния и  $M_1 = \sum_{x=0}^{\omega} M_{1,x}$  през отчетния период.

Съобразяваме още, че броят на умрелите на дадена възраст зависи както от повъзрастовото равнище на смъртност, така и от броя на населението на тази възраст. Изхождаме и от факта, че смъртността на дадена възраст  $x$  години ( $m_x$ ) се дефинира като отношение на плътността на умрелите на тази възраст ( $M_x$ )<sup>3</sup> към средния брой на населението на същата възраст -  $\bar{S}_x$ . Или  $m_x = \frac{M_x}{\bar{S}_x}$ , откъдето намираме, че  $M_x = m_x \bar{S}_x$ .

Това позволява да запишем плътностите в подходящия за анализа вид:

$$M_0 = \sum_{x=0}^{\omega} M_{0,x} = \sum_{x=0}^{\omega} m_{0,x} \bar{S}_{0,x}, \text{ респ. } M_1 = \sum_{x=0}^{\omega} M_{1,x} = \sum_{x=0}^{\omega} m_{1,x} \bar{S}_{1,x}.^4$$

Така достигаме до споменатата форма на връзката между резултативната и факторните величини – сума от произведенията на повъзрастовите равнища на смъртност (интензивен фактор) и съответните средни населения по възраст (екстензивен фактор).

Индексната теория разлага общия прираст по една от следните две алтернативни схеми:

$$\begin{aligned} M_1 - M_0 &= \sum M_1 - \sum M_0 = \sum m_1 S_1 - \sum m_0 S_0 = \sum (m_1 - m_0) S_1 + \sum (S_1 - S_0) m_0 = \\ &= \sum (m_1 - m_0) S_0 + \sum (S_1 - S_0) m_1 \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Посредством плътността събитията се привеждат към една календарна година. Ако в случая  $M'_0(t)dt$  е нарастването на интегралната функция на умрелите през елементарния времеен интервал  $dt$ , измерен в години, то плътността на умрелите за този период е  $M'_0(t)$  - производната на функцията или диференциалната функция на умрелите. Затова разглежданите тук периоди са едногодишни и е налице равенство между плътността на умрелите и техния брой през периода.

<sup>4</sup> По-нататък за удобство се пропускат границите на сумите, означенията за възрастта, както и знакът за средното значение на населението – чертата върху символа  $\bar{S}$ .

Смята се, че всеки от двата субприраста отразява поотделно влиянието от промените на възрастовата смъртност и тези в броя на населението по възраст, съответно при базисни и при отчетни тегла.

За да се избегне неудобството от употребата на тегла от различни периоди, се оперира и с трети субприраст. За целта се въвежда и средната смъртност:

$$M_1 - M_0 = \sum m_1 S_1 - \sum m_0 S_0 = \bar{m}_1 \sum S_1 - \bar{m}_0 \sum S_0,$$

където  $\bar{m}_0$ , респ.  $\bar{m}_1$  са съответно общата (средна) смъртност на населението през базисния и през отчетния период.

Започваме с анализа при базисни тегла.

### 1. Адитивен анализ при базисни тегла

При тази схема на разлагане работим само с базисни тегла, затова полагаме  $\bar{m}_1 = \bar{m}_0 + \Delta_{\bar{m}}$ , а  $S_1 = S_0 + \Delta_s$  и заместваме:

$$\begin{aligned} M_1 - M_0 &= (\bar{m}_0 + \Delta_{\bar{m}}) \sum (S_0 + \Delta_s) - \bar{m}_0 \sum S_0 = \bar{m}_0 \sum \Delta_s + \Delta_{\bar{m}} \sum S_0 + \Delta_{\bar{m}} \sum \Delta_s = \\ &= \bar{m}_0 \sum (S_1 - S_0) + (\bar{m}_1 - \bar{m}_0) \sum S_0 + (\bar{m}_1 - \bar{m}_0) \sum (S_1 - S_0). \end{aligned}$$

Обичайната интерпретация на трите субприраста е следната:

а) *Първият компонент*  $\bar{m}_0 \sum (S_1 - S_0)$  се възприема като оценка на частта от общия прираст на умрелите, която се дължи само на промените в броя на населението. Оценката обаче се извършва при равнище на базисната средна смъртност  $\bar{m}_0$ , която от своя страна се определя не само от възрастовата смъртност, но и от структурата на населението през този период. Това означава, че структурата се съдържа имплицитно в посочения компонент. Според изискванията на новия подход нейното участие трябва да стане явно. Това води до следната модификация на първоначалния израз:

$$\bar{m}_0 \sum (S_1 - S_0) = \left( \sum S_1 - S_0 \right) \sum m_0 s_0 = I_0,^5$$

където  $s_0 = \frac{S_0}{\sum S_0}$ , а  $\sum s_0 = 1$ .

Величините  $s_0$  се отнасят за всяка възраст  $x$  ( $x = 0, 1, 2, \dots, \omega$ ) и определят възрастовата структура на населението през базисния период. Това е структурната характеристика на екстензивния фактор, която се въвежда допълнително и явно съгласно изискванията на новия подход.

<sup>5</sup> Със символите I, II, III и т.н. означаваме и следващите субприрасти (самостоятелни, чисти, изолирани и съвместни), а с индекс 0, респ. 1 – принадлежността към базисния или отчетния период.

б) Вторият компонент  $(\bar{m}_1 - \bar{m}_0) \sum S_0$  се възприема най-общо като част от общия прираст, която се дължи на промените в средното равнище на интензивния фактор. В действителност тук се съдържат три влияния (две изолирани и едно съвместно). Те се изолират лесно, чрез възможностите на новия подход, след като се съобрази, че

$$\bar{m}_1 - \bar{m}_0 = \sum m_0 (s_1 - s_0) + \sum s_0 (m_1 - m_0) + \sum (m_1 - m_0)(s_1 - s_0),$$

където по аналогия  $s_1 = \frac{S_1}{\sum S_1}$ , а  $\sum s_1 = 1$ . Съвкупността на величините  $s_1$

за всички възрасти характеризира възрастовата структура на населението през отчетния период.

Заместваме в началния израз и получаваме:

$$\begin{aligned} (\bar{m}_1 - \bar{m}_0) \sum S_0 &= \sum m_0 (s_1 - s_0) \sum S_0 + \\ &+ \sum s_0 (m_1 - m_0) \sum S_0 + \sum (m_1 - m_0)(s_1 - s_0) \sum S_0. \end{aligned}$$

Получените три субприраста означават:

$$II_0 = \sum S_0 \sum (s_1 - s_0) m_0 - \text{оценка на прираста в броя на умрелите, пре-}$$

дизвикан *само* от промените във възрастовата структура на населението. Определя се като *чисто* (самостоятелно) влияние на структурния фактор при общия брой на населението и повъзрастовата смъртност през базисния период.

$III_0 = \sum S_0 \sum (m_1 - m_0) s_0$  - дефинира се като прираст в броя на умрелите, който се дължи *само* на промените в повъзрастовата смъртност. Това е *чистото* влияние на интензивния фактор при брой на населението и възрастовата структура през базисния период.

$$II_0 III_0 = \sum S_0 \sum (m_1 - m_0)(s_1 - s_0) - \text{прираст в броя на умрелите, пре-}$$

дизвикан от *съвместните* промени в повъзрастовата смъртност и възрастовата структура при брой на населението през базисния период.

в) Третият компонент  $(\bar{m}_1 - \bar{m}_0) \sum (S_1 - S_0)$  се отличава също със сложния си характер. След съответните замествания с полученото по т. "б" той се разлага на следните три съставни части:

$$\begin{aligned} (\bar{m}_1 - \bar{m}_0) \sum (S_1 - S_0) &= (\sum S_1 - \sum S_0) \sum m_0 (s_1 - s_0) + \\ &+ (\sum S_1 - \sum S_0) \sum s_0 (m_1 - m_0) + (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (m_1 - m_0)(s_1 - s_0) \end{aligned}$$

$$\text{Първият израз след равенството е } I_0 II_0 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (s_1 - s_0) m_0.$$

Това е частта от общия прираст на умираанията, която се дължи на *съвмест-*

ното влияние на промените в общия брой на населението и на неговата възрастова структура при базисна повъзрастова смъртност.

Вторият израз е  $I_0III_0 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (m_1 - m_0) s_0$ . Той съответства на частта от общия прираст, която се дължи на *съвместното* изменение на общия брой на населението и на повъзрастовата смъртност при възрастова структура през базисния период.

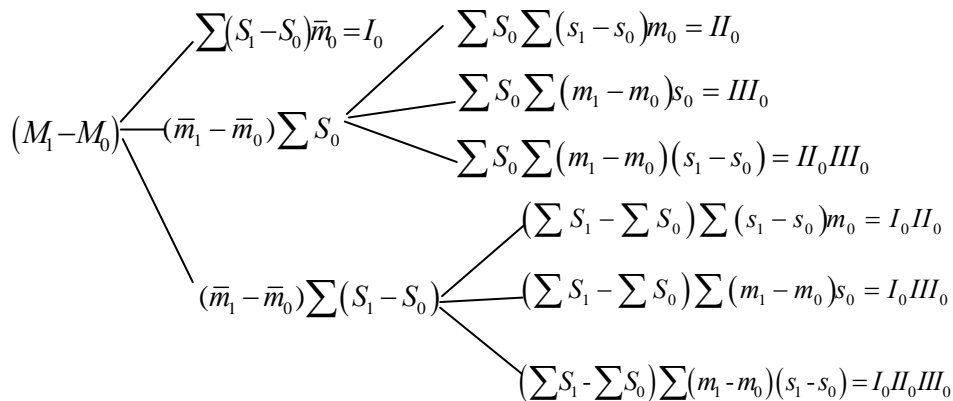
Третият и последен израз в цялостното разложение е:

$$I_0II_0III_0 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (m_1 - m_0) (s_1 - s_0).$$

Той измерва останалата част от общия прираст, която се причинява от *съвместното* влияние на трите фактора: общия брой на населението, повъзрастовата смъртност и възрастовата структура.

Изложената последователност на разлагането и субординацията между прирастите е показана на следващата схема.

Схема



Накрая установихме, че общият прираст на умрелите за времето от базисния до отчетния период се разлага на следните крайни седем съставни части:

$$M_1 - M_0 = I_0 + II_0 + III_0 + I_0II_0 + I_0III_0 + II_0III_0 + I_0II_0III_0.$$

Първите три субприраста се възприемат като продукт на *чистото* (самостоятелното) влияние на всеки от трите фактора. Следващите три прираста се разглеждат като резултат от тяхното *съвместно* комбинирано влияние (комбинации от “втори клас”), а последният – комбинация от трите фактора.

Специалният интерес към структурните влияния налага една допълваща интерпретация. Както се вижда, структурен компонент се съдържа

в изразите  $II_0$  (самостоятелен, чист ефект) и в комбинираните ефекти  $I_0II_0, II_0III_0$  и  $I_0II_0III_0$ . От тези 4 основни структурни компонента могат да се формират следните възможни комбинации на структурни влияния. Комбинациите от “втори клас” са 6 на брой: а)  $II_0 + I_0II_0$ ; б)  $II_0 + II_0III_0$ ; в)  $II_0 + I_0II_0III_0$ ; г)  $I_0II_0 + II_0III_0$ ; д)  $I_0II_0 + I_0II_0III_0$  и е)  $II_0III_0 + I_0II_0III_0$ . Комбинациите от “трети клас” са 4 вида: а)  $II_0 + I_0II_0 + II_0III_0$ ; б)  $II_0 + II_0III_0 + I_0II_0III_0$ ; в)  $I_0II_0 + II_0III_0 + I_0II_0III_0$  и г)  $II_0 + I_0II_0 + I_0II_0III_0$ . Последната комбинация от “четвърти клас” включва споменатите 4 основни структурни компонента:  $II_0 + I_0II_0 + II_0III_0 + I_0II_0III_0$ .

Както изглежда обаче, въпреки обособените строги съответствия и равенства разгледаните прирасти едва ли отразяват с идеална точност резултата от сложното действие и взаимодействие на факторите в действителността. И все пак въпреки възприетите условности изведеното крайно равенство дава приемлива оценка за размера и характера на факторните влияния. Казаното не се отнася само до предложената схема на разлагане. То важи изобщо за схемите на индексния факторен анализ, както и за някои от другите измерители на комплексни взаимодействия.

## 2. Адитивен анализ при отчетни тегла

Алтернативното разлагане на общия прираст, но при тегла от отчетния период започва с основното равенство:

$$M_1 - M_0 = \bar{m}_1 \sum S_1 - \bar{m}_0 \sum S_0 = \sum S_1 \sum m_1 s_1 - \sum S_0 \sum m_0 s_0.$$

За да работим обаче с отчетни тегла, полагаме  $S_0 = S_1 - \Delta_s$  и  $m_0 = m_1 - \Delta_m$  и продължаваме:

$$\begin{aligned} & \sum S_1 \sum m_1 s_1 - \left( \sum S_1 - \sum \Delta_s \right) \sum (m_1 - \Delta_m) (s_1 - \Delta_s) = \\ & \sum S_1 \sum m_1 s_1 - \left( \sum S_1 - \sum \Delta_s \right) \left( \sum m_1 s_1 - \sum m_1 \Delta_s - \sum \Delta_m s_1 + \sum \Delta_m \Delta_s \right). \end{aligned}$$

Или в краен завършен вид общият прираст се разлага на:

$$\begin{aligned} M_1 - M_0 = & \left( \sum S_1 - \sum S_0 \right) \sum m_1 s_1 + \sum S_1 \sum m_1 (s_1 - s_0) + \sum S_1 \sum (m_1 - m_0) s_1 - \\ & - \left( \sum S_1 - \sum S_0 \right) \sum m_1 (s_1 - s_0) - \left( \sum S_1 - \sum S_0 \right) \sum (m_1 - m_0) s_1 - \\ & - \sum S_1 \sum (m_1 - m_0) (s_1 - s_0) + \left( \sum S_1 - \sum S_0 \right) \sum (m_1 - m_0) (s_1 - s_0). \end{aligned}$$

Компонентите на общия прираст при отчетни тегла се тълкуват аналогично на компонентите при базисни тегла. Различието е само в базата на измерване. Тук параметрите са от отчетния период.

Първият компонент е  $I_1 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum m_1 s_1$ . Той определя частта от общия прираст, която се дължи *само* на промените в общия брой на населението при отчетна смъртност (съчетание на повъзрастовата смъртност и структурата през отчетния период).

Следващият компонент  $II_1 = \sum S_1 \sum (s_1 - s_0) m_1$  е частта от общия прираст, която се причинява *само* от промените във възрастовата структура при брой на населението от отчетния период и повъзрастовата смъртност през този период.

Третият израз  $III_1 = \sum S_1 \sum (m_1 - m_0) s_1$  показва размера на субприраста, който се дължи *само* на промените на повъзрастовата смъртност при брой на населението и неговата възрастова структура от отчетния период.

Следващият израз  $I_1 II_1 = -(\sum S_1 - \sum S_0) \sum (s_1 - s_0) m_1$  съответства на частта от общия прираст, която се дължи на *съвместния* ефект от промените в общия брой на населението и промените във възрастовата структура при повъзрастовата смъртност от отчетния период. Този компонент на общия прираст участва с отрицателен знак.

Петата част от прираста е  $I_1 III_1 = -(\sum S_1 - \sum S_0) \sum (m_1 - m_0) s_1$ . Тя се дължи на *съвместните* промени в общия брой на населението и повъзрастовата смъртност при възрастовата структура през отчетния период. И този компонент участва с отрицателен знак.

Шестата част от общия прираст се определя от израза  $II_1 III_1 = -[\sum S_1 \sum (m_1 - m_0) (s_1 - s_0)]$ . Субприрастът е резултат от *съвместните* промени в повъзрастовата смъртност и възрастовата структура на населението при брой на населението през отчетния период. И тази част на прираста участва с отрицателен знак.

Последната (седмата) част от общия прираст на умиранията  $I_1 II_1 III_1 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (m_1 - m_0) (s_1 - s_0)$  се дължи на *съвместното* влияние от промените на трите фактора: общия брой на населението, повъзрастовата смъртност и възрастовата структура. Този субприраст не променя размера си при двата начина на претегляне:  $I_0 II_0 III_0 = I_1 II_1 III_1$ .

Оказва се, че при отчетни тегла общият прираст се разлага на съответните седем крайни субприраста:

$$M_1 - M_0 = I_1 + II_1 + III_1 - I_1 II_1 - I_1 III_1 - II_1 III_1 + I_1 II_1 III_1.$$

Коректността изисква изложените теоретични постановки да бъдат подкрепени с практическо приложение на метода. За целта изследваме

Един подход за адитивен индексен анализ

факторната обусловеност на промените в броя на умрелите в България през 2000 и 2007 г. За удобство съставяме работната табл. 1.

Таблица 1

Възраст (години)	Умрели		Население (хил.)		Смъртност		Структура	
	2000 г. $M_0$	2007 г. $M_1$	2000 г. $\bar{S}_0$	2007 г. $\bar{S}_1$	2000 г. $m_0$	2007 г. $m_1$	2000 г. $s_0$	2007 г. $s_1$
0-14	1433	1005	1284	1028	0.001116	0.000978	0.1572	0.1342
15-29	1347	1192	1783	1573	0.000755	0.000758	0.2182	0.2054
30-44	3699	2968	1673	1636	0.002211	0.001814	0.2048	0.2136
45-59	13950	13771	1654	1628	0.008434	0.008459	0.2024	0.2125
60 и +	94658	94068	1776	1795	0.053300	0.052410	0.2174	0.2343
Общо	115087	113004	8170	7660	0.014086	0.014752	1.0000	1.0000

Таблица 1а

Възраст (години)	Разлики (промени)		Смъртност ( $\sum m_0 s_0$ и $\sum m_1 s_1$ )	
	$(m_1 - m_0)$	$(s_1 - s_0)$	$m_0 s_0$	$m_1 s_1$
0-14	-0.000138	-0.0230	0.0001754	0.0001312
15-29	0.000003	-0.0128	0.0001647	0.0001556
30-44	-0.000400	0.0088	0.0004528	0.0003874
45-59	0.000025	0.0101	0.0017070	0.0017975
60 и +	-0.000890	0.0169	0.0115874	0.0122796
Общо	X	0	0.0140873	0.0147513

Таблица 1б

Възраст (години)	Факторни влияния				
	Базисни тегла		Отчетни тегла		Неутрални
	$m_0(s_1 - s_0)$	$s_0(m_1 - m_0)$	$m_1(s_1 - s_0)$	$s_1(m_1 - m_0)$	
0-14	-0.0000256	-0.0000216	-0.0000224	-0.0000185	0.0000031
15-29	-0.0000096	0.0000006	-0.0000097	0.0000006	0.0000000
30-44	0.0000194	-0.0000819	0.0000159	-0.0000854	-0.0000035
45-59	0.0000851	0.0000050	0.0000854	0.0000053	0.0000002
60 и +	0.0009007	-0.0001934	0.0008857	-0.0002085	-0.0000150
Общо	0.0009700	-0.0002913	0.0009549	-0.0003065	-0.0000152

От таблицата се вижда, че умрелите през 2007 г. са с 2083 човека по-малко в сравнение с базисната 2000 г.:  $M_1 - M_0 = 113004 - 115087 = -2083$ .



Анализът показва, че при базисни тегла намалението е резултат от следните факторни влияния:

а)  $I_0 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum m_0 s_0 = -510000 \times 0,0140873 = -7184$  - отрицателен прираст в броя на умрелите поради *самостоятелното* влияние на промените в общия брой на населението през периода (влияние на екстензивния фактор).

б)  $II_0 = \sum S_0 \sum (s_1 - s_0) m_0 = 8170000 \times 0,000970 = 7925$  - положителен прираст, причинен от *самостоятелното* влияние на промените във възрастовата структура на населението (структурен фактор).

в)  $III_0 = \sum S_0 \sum (m_1 - m_0) s_0 = 8170000 \times (-0,0002913) = -2380$  - отрицателен прираст, предизвикан от *самостоятелното* влияние на промените в повъзрастовата смъртност (интензивен фактор).

г)  $I_0 II_0 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (s_1 - s_0) m_0 = -510000 \times 0,000970 = -495$  - отрицателен прираст, резултат от *съвместното* влияние на промените в общия брой на населението и промените във възрастовата структура.

д)  $I_0 III_0 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (m_1 - m_0) s_0 = -510000 \times (-0,0002913) = 148$  - положителен прираст, дължащ се на *съвместното* влияние на промените в броя на населението и промените в повъзрастовата смъртност.

е)  $II_0 III_0 = \sum S_0 \sum (s_1 - s_0) (m_1 - m_0) = 8170000 \times (-0,0000152) = -124$  - отрицателен прираст, предизвикан от *съвместното* влияние на промените във възрастовата структура и повъзрастовата смъртност.

ж)  $I_0 II_0 III_0 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (s_1 - s_0) (m_1 - m_0) = -510000 \times (-0,0000152) = 8$  - последната част от общия прираст, която се дължи на *съвместното* влияние на трите фактора: население, повъзрастова смъртност и възрастова структура.

Съгласно общата схема на разлагане при базисни тегла общият прираст е сума от установените субприрасти:

$$M_1 - M_0 = -7184 + 7925 - 2380 - 495 + 148 - 124 + 8 = -2102 \approx -2083.$$

Приблизителното равенство се дължи на закръгленията при изчислителните процедури.

Както се вижда, преобладаващата част от общия прираст се обуславя от самостоятелното влияние на екстензивния, интензивния и структурния фактор.

Разлагането при *отчетни тегла* води до аналогичните субприрасти:

а)  $I_1 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum m_1 s_1 = -510000 \times 0,0147513 = -7523$  - отрицателен прираст, който се дължи на *самостоятелното* влияние на промените в общия брой на населението (влияние на екстензивния фактор).

б)  $II_1 = \sum S_1 \sum (s_1 - s_0) m_1 = 7660000 \times 0,0009549 = 7314$  - положителен прираст, причинен от *самостоятелното* влияние на промените във възрастовата структура (структурен фактор).

в)  $III_1 = \sum S_1 \sum (m_1 - m_0) s_1 = 7660000 \times (-0,0003065) = -2348$  - отрицателен прираст, който се дължи на *самостоятелното* влияние на промените в повъзрастовата смъртност (интензивен фактор).

г)  $I_1 II_1 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (s_1 - s_0) m_1 = -510000 \times 0,0009549 = -487$  - отрицателен прираст, предизвикан от *съвместното* влияние на промените в броя на населението и възрастовата структура.

д)  $I_1 III_1 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (m_1 - m_0) s_1 = -510000 \times (-0,0003065) = 156$  - положителен прираст, формиран от *съвместното* влияние на промените в общия брой на населението и повъзрастовата смъртност.

е)  $II_1 III_1 = \sum S_1 \sum (m_1 - m_0) (s_1 - s_0) = 7660000 \times (-0,0000152) = -116$  - отрицателна част от общия прираст, която се дължи на *съвместното* влияние на промените в повъзрастовата смъртност и възрастовата структура.

ж)  $I_1 II_1 III_1 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (m_1 - m_0) (s_1 - s_0) = -510000 \times (-0,0000152) = 8$  - останалата част от общия прираст, резултат от *съвместното* влияние на трите фактора: броя на населението, повъзрастовата смъртност и възрастовата структура.

Установихме, че при общото балансово равенство субприрастите по т. "г", "д" и "е", участват с отрицателен знак:

$$M_1 - M_0 = -7523 + 7314 - 2348 - (-487) - 156 - (-116) + 8 = -2102 \approx -2083.$$

И при отчетни тегла посоката на факторните влияния се запазва. Различни са в някаква степен обаче числените значения на субприрастите в сравнение с тези при базисни тегла. За размера на различията може да се съди от табл. 2.

Таблица 2

Тегла	Факторни компоненти							Абс. сума
	I	II	III	I, II	I, III	II, III	I, II, III	
Отчетни	-7523	7314	-2348	-487	156	-116	8	17952
Базисни	-7184	7925	-2280	-495	148	-124	8	18264
Абс. разлика	339	611	32	8	8	8	0	312

От табл. 2 се вижда, че и при двата начина на претегляне определящи са прирастите от самостоятелното влияние на факторите *I*, *II* и *III*. Техният дял спрямо общата абсолютна сума на прирастите е 95.75% при базисни и приблизително толкова при отчетни тегла – 95.72%.

Тук няма да коментираме избора на тегла, тъй като това е достатъчно сложен проблем, който изисква самостоятелно и задълбочено изследване, подкрепено със солидна аргументация. Ще отбележим само, че всяка от схемите на разлагане има свой собствен познавателен смисъл, а значенията на прирастите при базисни и отчетни тегла могат да са възприемат като гранични стойности на реалните факторни влияния, чието точно значение е трудно да се установи. Поради важността на този проблем обаче ще се опитаме да интерпретираме произхода на тези различия, разбира се, доколкото е възможно.

### 3. Анализ на прирастите при базисни и при отчетни тегла

За сложния характер на различията между прирастите при двата начина на претегляне би могло да се научи повече, след като се анализират техните абсолютни и относителни различия.

а) Първата абсолютна разлика е:

$$I_1 - I_0 = \left( \sum S_1 - \sum S_0 \right) \bar{m}_1 - \left( \sum S_1 - \sum S_0 \right) \bar{m}_0 = \left( \sum S_1 - \sum S_0 \right) (\bar{m}_1 - \bar{m}_0) = 339.$$

Тя се обуславя от различието в общия брой на населението и от това в общата (средната) смъртност през базисния и отчетния период.

Оказва се, че относителното различие на тези два прираста се дължи изцяло на различието в общата смъртност и обуславящите я фактори (повъзрастовата смъртност и възрастовата структура).

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_0} = \frac{\sum m_1 s_1}{\sum m_0 s_0} = 1,047.$$

б) Втората абсолютна разлика е:

$$II_1 - II_0 = \sum S_1 \sum (s_1 - s_0) m_1 - \sum S_0 \sum (s_1 - s_0) m_0 = 611.$$

Тя се дължи на различието в общия брой на населението през двата периода и на структурните промени, измерени съответно спрямо базисната и отчетната повъзрастова смъртност.

Относителното различие в случая се определя от промяната в общия брой на населението, както и от структурните промени, свързани с тези в повъзрастовата смъртност:

$$\frac{II_1}{II_0} = \frac{\sum S_1}{\sum S_0} \times \frac{\sum (s_1 - s_0) m_1}{\sum (s_1 - s_0) m_0} = \frac{\sum S_1}{\sum S_0} \times \frac{(\bar{m}_1 - \bar{m}_1^{(s_0)})}{(\bar{m}_0^{(s_1)} - \bar{m}_0)} = 0,93757 \times 0,9844 = 0,9229.$$

в) Третата абсолютна разлика се дефинира от израза:

$$III_1 - III_0 = \sum S_1 \sum (m_1 - m_0) s_1 - \sum S_0 \sum (m_1 - m_0) s_0 = 32.$$

Тя се определя от разликата между общия брой на населението през двата периода и от промяната на повъзрастовата смъртност, измерена съответно спрямо базисната и отчетната възрастова структура.

Относителното различие зависи от промените в броя на населението и от измененията в повъзрастовата смъртност, свързани със структурните промени:

$$\frac{III_1}{III_0} = \frac{\sum S_1}{\sum S_0} \times \frac{\sum (m_1 - m_0) s_1}{\sum (m_1 - m_0) s_0} = \frac{\sum S_1}{\sum S_0} \times \frac{(\bar{m}_1 - \bar{m}_0^{(s_1)})}{(\bar{m}_1^{(s_0)} - \bar{m}_0)} = 0,93757 \times 1,05218 = 0,98649.$$

г) Четвъртата абсолютна разлика е:

$$I_1 II_1 - I_0 II_0 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (s_1 - s_0) m_1 - (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (s_1 - s_0) m_0 = 8.$$

Тя зависи от разликата в броя на населението през базисния и отчетния период, както и от промените в структурата, измерени спрямо тези в повъзрастовата смъртност.

При отношението между двата прираста обаче влиянието на екстензивния фактор (населението) отпада. Запазва се само ефектът от структурните промени, свързани с промените в повъзрастовата смъртност:

$$\frac{I_1 II_1}{I_0 II_0} = \frac{\sum (s_1 - s_0) m_1}{\sum (s_1 - s_0) m_0} = \frac{(\bar{m}_1 - \bar{m}_1^{(s_0)})}{(\bar{m}_1^{(s_1)} - \bar{m}_0)} = 0,9844.$$

Необходимо е да се отбележи, че това отношение е компонент на отношението  $\frac{II_1}{II_0}$ .

д) Абсолютната разлика при петия субприраст е:

$$I_1 III_1 - I_0 III_0 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (m_1 - m_0) s_1 - (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (m_1 - m_0) s_0 = 8.$$

Разликата се обуславя от промените в броя на населението и в повъзрастовата смъртност, измерени спрямо структурните промени.

И при това относително различие влиянието на екстензивния фактор отпада:

$$\frac{I_1 III_1}{I_0 III_0} = \frac{\sum (m_1 - m_0) s_1}{\sum (m_1 - m_0) s_0} = \frac{(\bar{m}_1 - m_0^{(s_1)})}{(\bar{m}_1^{(s_0)} - \bar{m}_0)} = 1,05218.$$

Не е трудно да се забележи, че това отношение е компонент на  $\frac{III_1}{III_0}$ .

е) Шестата абсолютна разлика се представя от израза:

$$II_1 III_1 - II_0 III_0 = \sum S_1 \sum (m_1 - m_0)(s_1 - s_0) - \sum S_0 \sum (m_1 - m_0)(s_1 - s_0) = 8.$$

Тя се обуславя от промените в общия брой на населението, съчетани с промените в възрастовата смъртност и възрастовата структура.

Относителното различие в този случай се определя само от промените в общия брой на населението:

$$\frac{II_1 III_1}{II_0 III_0} = \frac{\sum S_1 \sum (m_1 - m_0)(s_1 - s_0)}{\sum S_0 \sum (m_1 - m_0)(s_1 - s_0)} = \frac{\sum S_1}{\sum S_0} = 0,93757.$$

ж) При последния компонент на общия прираст не съществува разлика между двата начина на претегляне:

$$I_0 II_0 III_0 = I_1 II_1 III_1 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (m_1 - m_0)(s_1 - s_0) = 8.$$

Освен установените връзки между различно претеглените комбинирани влияния на факторите са налице и други любопитни факти. Например:

$$(I_1 II_1 - I_0 II_0) = (I_1 III_1 - I_0 III_0) = (II_1 III_1 - II_0 III_0) = I_0 II_0 III_0 = I_1 II_1 III_1 = \\ = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (m_1 - m_0)(s_1 - s_0) = 8.$$

Записаното показва, че отделните разлики между прирастите с комбинирано влияние при базисни и отчетни тегла са равни. Равенството прецизира още, че те са равни на съвместното влияние на трите фактора, от което следва изводът, че това влияние е обуславящо и при формирането на самите разлики.

Налице са и други връзки, които разкриват и допълват съдържателната страна на анализа. Например обединяването на структурните субприрасти  $II_0$  и  $II_0 III_0$  (комбинацията от "втори клас" по т. "б") води до съдържателно ново структурно влияние, което съчетава общия обем на екстензивния фактор през базисния период с груповите интензивности през отчетния период:

$$II_0 + II_0 III_0 = \sum S_0 \sum (s_1 - s_0) m_0 + \sum S_0 \sum (m_1 - m_0)(s_1 - s_0) = \\ = \sum S_0 \sum (s_1 - s_0) m_1.$$

Интересен резултат се получава и при комбинацията:

$$II_0 + I_0 II_0 = \sum S_0 \sum (s_1 - s_0) m_0 + (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (s_1 - s_0) m_0 = \\ = \sum S_1 \sum (s_1 - s_0) m_0.$$

Това е структурната комбинация от “втори клас” по т. “а”.

Не по-малко интересен е крайният вид на комбинацията по т. “д”:

$$I_0II_0 + I_0II_0III_0 = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (s_1 - s_0) m_0 + (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (m_1 - m_0) (s_1 - s_0) = (\sum S_1 - \sum S_0) \sum (s_1 - s_0) m_1 = I_1II_1.$$

Резултатът от извършеното преобразуване е впечатляващ – получи се съвместно структурно влияние, изцяло при отчетни тегла.

Тези няколко примера свидетелстват за наличие на строги връзки между прирастите при базисни и при отчетни тегла. Току що установеното е от голямо значение за правилното изграждане на логико-съдържателните схеми на индексния факторен анализ и повишаване на техните познавателни възможности.

Могат да се посочат и някои други съответствия и връзки. Например познавателният смисъл на отношението  $\frac{I_1}{I_0}$  се разкрива още по-пълно, ако се

потърси неговата връзка с общия индекс на структура (1.0670) и индексът на смъртността (0.9787).<sup>6</sup> В случая анализът се обогатява с разкриващата се мултипликативна връзка:

$$\frac{I_1}{I_0} = 1,0670 \times 0,9787 = 1,044 \approx 1,047.$$

Установява се още, че:

$$\frac{II_1}{II_0} = \frac{II_1III_1}{II_0III_0} \times \frac{I_1II_1}{I_0II_0} = 0,93757 \times 0,9844 = 0,9229.$$

Допълнителна информация се съдържа и в съответствието:

$$\frac{III_1}{III_0} = \frac{II_1III_1}{II_0III_0} \times \frac{I_1III_1}{I_0III_0} = 0,93757 \times 1,05218 = 0,98649.$$

<sup>6</sup> Оценката за размера на структурните промени е получена чрез “общия индекс на структура”, предлаган в демографската статистика:

$$I_{str} = \frac{\sum m_1 S_1}{\sum m_0 S_0} \times \frac{\sum S_1}{\sum S_0} = 1,0670. \text{ Използван е и “непретегленият индекс на смъртността”:$$

$$I_m = \frac{\sum m_1}{5} : \frac{\sum m_0}{5} = 0,9787.$$

Потвърждава се, че  $I_{\bar{m}} = \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_0} = I_{str} \times I_m$ , а  $I_M = \frac{M_1}{M_0} = I_{\bar{m}} \times I_s = 0,9816 \approx 0,9819$ .

Не е трудно да се направят съответните изводи при всяка от посочените връзки. Налице са и други подобни релации, които не се разглеждат тук. Взети в тяхната цялост и взаимовръзка, те биха били добра основа за полезни размисли върху особеностите на индексната теория.

В заключение би могло да се обобщи, че изложените теоретичните основи на новия подход за провеждане на адитивен индексен факторен анализ позволяват да се изгради една по-стройна, изчерпателна и логична схема на декомпозиране на общия прираст. Направените обширни разисквания в теоретичен и приложен аспект подкрепят идеята, че предложената теория разширява възможностите на анализа. Разсъжденията върху сложния характер на компонентите на общия прираст, техният произход и факторната им обусловеност допълват теорията. Изказани бяха и някои частични съмнения, свързани главно с обичайните условности на индексния анализ. Не бива да забравяме обаче, че съмненията и търсенето в науката са особено полезни за нейното развитие.

29.V.2009 г.