Доц. д-р Никола Чолаков*

ФУНКЦИИТЕ НА ПОЛЕЗНОСТ КАТО МОДЕЛ НА ОТНОШЕНИЕТО КЪМ РИСКА

Разгледан е такъв подход, с който може да се обясни мотивацията и поведението на застрахованите и застрахователите, както и да се хвърли светлина върху обосновката на застрахователните премии. Показано е как съгласно закона за намаляващата пределна полезност по-резервираното и предпазливо отношение към риска ограничава негативния ефект на ска́лата на полезността от понесените финансови загуби.[1]

JEL: G22; G32; D81

Функциите на полезност обикновено се свързват с нарастването на финансовото състояние или каквито и да е други ресурси или възможности и допълнителни ползи, извличани от такова нарастване. Съгласно закона за намаляващата пределна полезност всяко следващо увеличение на ресурсите води до допълнителна полезност, но с по-малък размер в сравнение със съответната от предходните прирасти. Като модел на отношението към риска би трябвало обаче мисълта да се движи в обратната посока - как възникнали загуби, накърняващи финансовото състояние, водят до съответно намаление и на полезността.

Отношението към риска може да се моделира и представи с подходящи функции на полезност, които всъщност са доста абстрактен, напълно концептуален модел. На фиг. 1 са показани четири варианта на такива функции на полезност, съответни на лица с различно отношение и различно оползотворяване на финансовото състояние и различна склонност да рискуват със съответен показател за резервираност към риска α (Pratt, 1964, p. 122–136); Arrow 1965, 1971, p. 90–109). Абсцисата съответства на финансовото състояние на лицата. То може да се подобри с допълнителни доходи или да се влоши от възможни загуби, които биха могли да се случат в по-близко или по-далечно бъдеще, и формира риска като събирателно понятие.

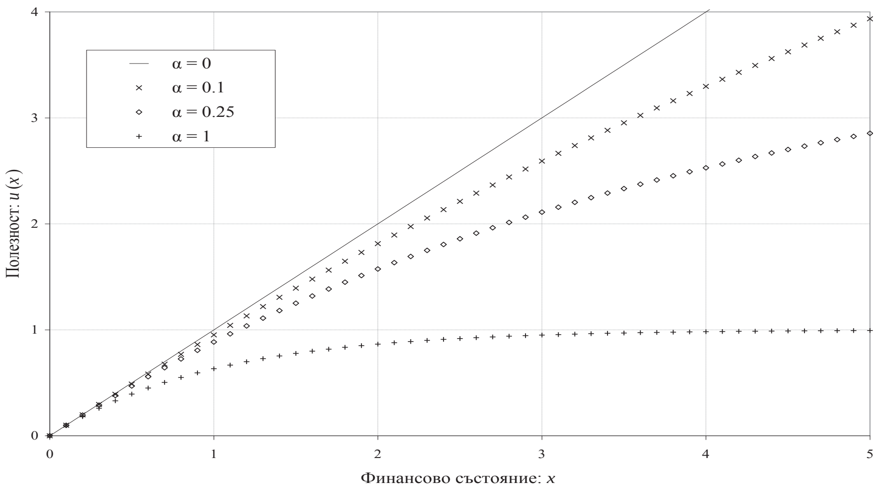
По ординатата са отразени ползите за лицата, получавани от съответното финансово състояние. Докато по абсцисата то може да се схваща като конкретни парични суми или по-общо като размер и обем на различни ресурси, ползите по ординатата са в абстрактни мерни единици, което е характерно за функциите на полезност като концептуален модел. Нарастването на финансовото състояние води до повече ползи, поради което функциите на полезност са монотонно растящи.

* УНСС, катедра "Човешки ресурси и социална защита, cholack@nat.bg

[1] Assoc. Professor Nikola Tcholakov, PhD. UTILITY FUNCTIONS AS A MODEL OF ATTITUDE TOWARDS RISK. *Summary:* In this paper we follow such an approach which explains the motivation and behavior of both insured and insurers and throws some light on the background of the insurance premiums. In addition it is shown that according to the Law of diminishing marginal utility more risk aversive and cautious attitude limits the negative impact of incurred financial losses on utility scale.

Фигура 1

Функции на полезност като модел на отношението към риска



При ниско финансово състояние линиите не се различават значително, което съответства на приблизително еднакво оползотворяване от четирите лица на такива скромни ресурси, както и на обичайното подминаване и често подценяване на дребните рискове. При такова финансово положение лицата сходно посрещат загубите и сходно ги оценяват на ска́лата на полезността.

При по-високо финансово състояние са възможни и по-големи загуби - тук разликите са видими и говорят за различно отношение на лицата към подобни рискове. Най-ниската линия на фиг. 1 съответства на твърде предпазливо поведение и резервирано отношение към риска ($\alpha = 1$). Значителни по размер загуби биха се отразили минимално на такова лице, на неговата полезност от накърненото финансово състояние и така то успява да смекчи негативните последици. Лице с подобно поведение се стреми да се предпази и застрахова срещу рисковете, като е готово да плати по-висока цена (респ. застрахователна премия), за да избегне такъв риск.

Следващите две линии ($\alpha = 0.25$ и $\alpha = 0.1$) разкриват по-висока склонност да се рискува. При тях финансовите загуби се отразяват на полезността в доста по-голям размер в сравнение с лицето с $\alpha = 1$. Непрекъснатата диагонална права ($\alpha = 0$) пък съответства на лице, което не познава риск и случайност и за което полезността е тъждествена с големината на паричните суми. Затова като полезност то понася загубите в пълния им размер.

Графиката на функциите на полезност са вдлъбнати (гледани откъм абсцисата) поради закона за намаляващата пределна полезност, което означава и намаляваща пределна склонност за поемане на риск при по-добро финансово положение и при възможни по-високи загуби. Лицето с $\alpha = 0$ се намира на границата на действието на закона за намаляващата пределна полезност. То не познава рисковете и не намира никакъв смисъл и полза от застраховането.

При разглеждането на функциите на полезност и закона за намаляващата пределна полезност обикновено се набляга на факта, че всяко увеличение във финансовото състояние води до по-висока полезност, но че втори нов прираст със същия размер допринася по-малко за полезността в сравнение с предходния. Ако функциите на полезност се разглеждат като модел на отношението към риска, би трябвало погледът да е насочен по-скоро в обратната посока – как финансовите загуби се отразяват върху полезността и нейното намаление. Така се обяснява защо по-резервираните към риска понасят загубите по-леко, ако се гледа негативният им ефект на ска́лата на полезността.

Тук насочваме вниманието към някои свързани с такъв подход построения. Във връзка с това заслужава да се спомене сентенцията, че според закона за намаляващата пределна полезност един загубен лев струва повече от един спечелен, което добре личи на фиг. 1.

Едно поведение може да се представи с различни, в определен смисъл еквивалентни функции на полезност, а и лицата може се придържат към различни функции на полезност в зависимост от ситуацията, в която са поставени. Всяка трансформация на тези функции от вида $au(x)+b$ при $a>0$ (монотонно растяща линейна) би представлявала друга математически, но всъщност еквивалентна функция на полезност – модел на същото поведение. Така, както отчетите на температурата на различните ска́ли – Целзий, Фаренхайт, Рьомур, Келвин, Ранкайн и др., означават едно и също, макар че са различни числа. Все пак от всички еквивалентни форми на функциите на полезност най-естествена и най-подходяща изглежда тази, за която $u(0)=0,$ каквито са показани на фиг. 1. Не всички функции на полезност обаче имат такава еквивалентна форма – пример за това е $\ln(x)$.

Стойността на застраховката от гледна точка на застрахованите

Ако пред едно лице с финансово положение x и придържащо се към функция на полезност $u(x)$ съществува риск за възможни загуби с размер като случайна величина $X \geq 0,$ би могло да се помисли за застраховка на стойност, определена със съответната премия P. Това означава лицето да замени риска като възможни бъдещи загуби с неясен и случен размер X, като ги прехвърли на застрахователите срещу заплащане на премия с напълно определен размер P. Лицето едва ли би постъпило така, ако не вижда полза от застраховката, което означава, че за него:

(1) $$u(x-P) \geq E(u(x-X)).$$

Лявата част на (1) е полезността за лицето след сключване на застраховката, като финансовото му състояние се намали с размера на платената премия, а в дясната е математическото очакване за полезността, ако само посреща риска и финансовото му положение се влоши с големината на понесените загуби X. Вижда се, че по-високата застрахователна премия намалява полезността в лявата част на неравенството, а с това и ползата от застраховане. Максималният размер P_0 на премията, която лицето би платило за застраховката, се получава при равенство в (1), представляващо индиферентната премия (Gerber, 1979, p. 67-68; Bowers et al., 1997, p. 7-11)[2] на застраховката от гледна точка на застрахования:

(2) $$u(x-P_0) = E(u(x-X)).$$

Всяка по-висока величина от индиферентната премия би обърнала неравенството в (1), показващо, че при такава премия лицето не би виждало полза от застраховката и не би се съгласило на подобен договор.

За дясната част на (2) може да се приложи неравенството на Йенсен (Чолаков, 2011, с. 116-119) за вдлъбнатите функции и се получава:

(3) $$u(x-P_0) \leq u(x-E(X)).$$

Поради монотонността на функциите на полезност от (3) може да се заключи, че:

(4) $$x-P_0 \leq x-E(X),$$

означаващо, че за индиферентната премия е валидно следното неравенство:

(5) $$P_0 \geq E(X).$$

Последното показва, че лице с резервирано и предпазливо отношение към риска е готово да плати по-висока стойност за застраховка в сравнение с математическото очакване за размера на възможните загуби, без това да накърни неговата полезност.

Стойността на застраховката от гледна точка на застрахователите

По подобен начин стои оценката на риска и полезността от застраховката от гледна точка на застраховател с резерви x, придържащ се към с функция на

[2] Понятието за индиферентните цени се среща и при изучаването на финансовите пазари (Carmona, 2009).

полезност $u(x)$. Размерът на удовлетворителната за него премия P по отношение на риск X би трябвало да отговаря на следното изискване:

(6) $$u(x) \le E(u(x - X + P)).$$

В лявата част на (6) е неговата полезност, преди да сключи застраховката, а в дясната - математическото му очакване за полезността след това: резервите му x намаляват с размера на възможните загуби X, но се увеличават с постъпилите премии P. Минималната стойност за P, при която (6) все още е в сила, представлява индиферентната премия на застраховката от негова гледна точка, при която се постига равенство в (6). По-ниска от нея би била в нарушение на (6) и неизгодна за застрахователя. Следователно за индиферентната премия P_0 е валидно равенството:

(7) $$u(x) = E(u(x - X + P_0)).$$

Съгласно неравенството на Йенсен за вдлъбнатите функции:

(8) $$E(u(x - X + P_0)) \le u(x - E(X) + P_0)$$

и понеже функциите на полезност са монотонно растящи, от (7) и (8) следва:

(9) $$P_0 \ge E(X).$$

Както и при кандидата за застраховка, индиферентната премия от гледна точка на застрахователя в общи линии надхвърля математическото очакване за размера на възможните загуби.

Показатели за отношението към риска и съответни варианти на функциите на полезност

От разгледаното дотук става ясно, че колкото по-предпазливо, по-резервирано или дори негативно отношение към риска има едно лице, толкова по-висока и над математическото очакване за размера на възможните загуби би се оказала индиферентната за него премия и толкова повече то би платило, за да получи застрахователна защита. Във връзка с тази закономерност като показатели за отношението към риска често се използват:

(10) $$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$ и

(11) $$R(x) = xr(x) = -x\frac{u''(x)}{u'(x)},$$

при съответна функция на полезност $u(x)$. Показателят (10) може да се нарече абсолютна резервираност, а (11) - относителна резервираност към риск. И двата показателя имат неотрицателна стойност за всяко $x \geq 0$, защото $u'(x) \geq 0$ (функциите на полезност са монотонно растящи) и $u''(x) \leq 0$ (функциите на полезност са вдлъбнати), като се допуска, че тези производни съществуват. Колкото по-висока е тяхната величина, толкова по-резервирано отношение към риска отразяват те. Реципрочните им стойности могат да се интерпретират като склонност към риск – съответно абсолютна и относителна. На фиг. 1 показателят α е абсолютната резервираност към риска и всяка от посочените функции на полезност е със специфична абсолютна резервираност, която обаче е константа, независеща от финансовото състояние и размера на възможните бъдещи загуби. При други функции на полезност показателите (10) и (11) може и да не са константи.

Често възниква въпросът как се изменя отношението към риска в зависимост от финансовото състояние, т.е. дали с нарастването на финансовото състояние x лицето става още по-предпазливо, по-резервирано (повишава се величината на (10) и(11)) или обратното - по-склонно да рискува (намалява величината на тези показатели), и как това проличава при съответната функция на полезност. От математическа гледна точка това означава идентифициране на функциите на полезност, за които тези показатели са монотонно растящи или намаляващи. Разграничителната линия между двете се намира при функции на полезност, за които (10) или (11) са константи.

Ако за едно лице абсолютната склонност към риска (10) не се променя с финансовото му положение, т.е. е някаква константа $\alpha \geq 0$, от съответното диференциално уравнение

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)} = \alpha \qquad (12)$$

се получава, че функцията на полезност при $\alpha > 0$ е с експоненциална форма:

$$u(x) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x}). \qquad (13)$$

На фиг. 1 са показани различни варианти на експоненциални функции на полезност. Вижда се, че при по-високи стойности за α графиката на функцията се накланя към абсцисата, което свидетелства за по-голяма резервираност към риска. Обратно, при по-ниски стойности за α графиката се изправя и доближава формата на правата линия, което е функция на полезност на лице, напълно индиферентно към риска, за което риск и случайност просто не съществуват.

Експоненциалните функции на полезност (13) представляват интерес и поради това, че съответните индиферентни премии имат особена форма. Като се замести (13) както в (2), така и в (7), се получава, че в зависимост от различната им резервираност към риска α, индиферентните премии за лица, придържащи се към експоненциална функции на полезност като модел на отношението към риска, са:

(14) $$P_0 = \frac{1}{\alpha} \ln E(e^{\alpha X}),$$

Това се отнася и за застрахованите, и за застрахователите. В дясната част на (14) се намира функцията, пораждащата статистическите моменти (Кендалл, Стьюарт, 1966, с. 91) на риска X, което прави индиферентните премии монотонно растящи относно α. Така, ако кандидатите за застраховка са по-резервирани към рисковете, отколкото застрахователите, което е обичайната ситуация, тяхната индиферентна премия би се оказала над тази на застрахователите, а това би оставило достатъчно място за двете страни по застрахователния договор да намерят взаимно изгодна цена на застрахователната защита.

Доста особено поведение се намира при праволинейната функция на полезност, която е от вида $u(x) = cx$ (като $c > 0$). Тя действително отговаря на индиферентност към риска, което може да се установи, като се използва индиферентната премия(2), оказваща се за такова лице равна на математическото очакване за размера на възможните загуби. Това би трябвало да е така, защото лице, непознаващо риск и случайност, не може да различи математическото очакване за размера на възможните загуби от фактическия размер на такива загуби и затова не вижда смисъл в застраховките. За такова лице е все едно дали да се застрахова и да плати премията, или само да се справя с възможните загуби, поради което то е в състояние да попадне под всякакъв риск, без дори да забележи и да го разпознае.

Праволинейната функция на полезност от вида $u(x) = cx$ (като $c > 0$) е решение на диференциалното уравнение (12) при $\alpha = 0$.

При останалите функции на полезност могат да се случат различни варианти. При едни от тях с нарастване на финансовото състояние се наблюдава намаляваща резервираност и увеличаваща се склонност да се рискува, каквато е $u(x) = \ln(1+x)$ със съответно от (10) $r(x) = (1+x)^{-1}$, представляващо монотонно намаляваща функция от x. Подобно поведение би се наблюдавало при лице с функция на полезност $u(x) = x^{\lambda}$ при $0 < \lambda < 1$, като за съответното от (10) се получава $r(x) = (1-\lambda)x^{-1}$. Пример за обратното – намаляваща склонност да се рискува, е функцията на полезност $u(x) = x - ax^2$, при $a > 0$, но само за ниво на финансите x в граници до $(2a)^{-1}$. Над тази граница формулата не представлява функция на полезност. При $0 \le x < (2a)^{-1}$ за съответното от (10) се получава $2a(1-2ax)^{-1}$, представляващо монотонно растяща функция и показващо повишаваща се резервираност към риска паралелно с нарастването на финансовото състояние.

Съществуват и много други функции на полезност, при които няма подобна тенденция, т.е. показателят (10) не е монотонна функция, а се редуват сегменти с противоположно отношение към риска.

Подобен анализ може да се направи и по отношение на показателя за относителна резервираност към риска (11). Решението на диференциалното уравнение

(15) $$-x\frac{u''(x)}{u'(x)}=\alpha, \text{ където } \alpha \ge 0 \text{ е константа, е:}$$

(16) $$u(x)=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ при } \alpha \ne 1$$ и

(17) $$u(x)=\ln(x), \text{ при } \alpha = 1,$$

представляващи функции на полезност, които образуват разграничителната линия между поведението на лицата с монотонно нарастваща и монотонно намаляваща относителна резервираност към риска, изразена с показателя (11).

Между абсолютната и относителната резервираност към риска като показатели може да има разминаване, като съответните стойности сочат в противоположни посоки, въпреки че са тясно свързани в проста формула (11). Подобно разминаване може да се констатира при функция на полезност $u(x)=x(1+x)^{-1}$, при която $r(x)$ от (10) е монотонно намаляваща, свидетелстващо за нарастваща склонност към риск с подобряване на финансовото положение, а съответното $R(x)$ от (11)– монотонно растяща, което говори за обратното – повишаваща се резервираност към риска.

Застрахователно-технически риск и добавка за сигурност

Индиферентните премии са пряко свързани с добавката за сигурност в посока към формирането на крайната цена на застраховките. Същността на добавката за сигурност може трудно да се схване, ако стойността на застраховките се разглежда само като математическо очакване, като някаква средна стойност за размера на възможните загуби. Неравенството (5) показва, че лице с резервирано отношение към риска е готово да плати за застраховка повече от очаквания размер на възможните загуби, като с такава горница фактически се финансира защитата на застрахователите срещу застрахователно-техническия риск. От гледна точка на застрахователите този факт се изразява с неравенството (9) – те не биха могли да осигурят надеждна защита без съответна добавка за сигурност, не биха могли дори да разчитат да се постигне финансово равновесие и непрекъсната платежоспособност в дейността си на този сектор. От своя страна застрахованите също са заинтересувани от финансовата стабилност на застрахователния сектор и затова са готови да заплатят премия, по-висока от математическото очакване (5)за размера на възможните загуби.

Застрахователно-техническият риск[3] е специфичен за сектора и се състои в нарушаване на баланса в отрицателна посока между плащанията на застрахователите по исковете, от една страна, и премийните приходи, от друга. Съгласно законите за големите числа и свързаните с тях статистически закономерности се постига изравняване на тези два противоположни потока, но предимно като математическо очакване. Що се отнася до самите парични суми, те биха могли да се отклоняват е една или друга посока, като големината на такива отклонения се подчинява на статистическите закономерности, известни като централни гранични теореми (Феллер, 1984, с. 271-279, 297-304). Всичко това е постижимо само ако актюерските сметки са не просто точни, а е намерен и адекватен модел на съответните рискове.

Изравняването на плащанията става както в пространството, така и в хода на времето. Изравняване в пространството означава, че възникналите искове в един портфейл или рискова група са сравнително малко на брой и какъвто и да е техният размер, съответните плащания на застрахователите могат да се компенсират с премийните приходи. Такава компенсация е винаги проблематична и фактически могат да се случат отклонения както в положителна, така и в отрицателна посока и по този начин годината да приключи с дефицит. Дефицитът може, разбира се, да се компенсира с излишъци през следващата година, което е изравняване на плащанията във времето, но такъв благоприятен изход съвсем не е сигурен. Действието на статистическите закономерности при изравняването на плащанията значително се улеснява при обемисти застрахователни портфейли, съдържащи голям брой еднакви или сходни независими един от друг рискове. Недостатъци или дефекти в това отношение могат да утежнят задачите пред застрахователите, да придадат известна неуправляемост на застрахователно-техническия риск и да внесат съмнения относно релевантността на съответните актюерски сметки и калкулираните застрахователни премии и тарифи. В крайна сметка това би се отразило твърде негативно на функционирането на целия сектор и би накърнило авторитета на застраховането.

Застрахователно-техническият риск е основно предизвикателство за резервите на застрахователите, тясно свързано с инвестиционната им политика и ликвидността на притежаваните активи. При наличие на повече резерви те могат да посрещнат дефицитите по-спокойно и да разчитат през следващите периоди

[3] Различни схващания за застрахователно-техническия риск са дадени в Драганов, Близнаков, 2000, с. 79-81.

да възстановят техния размер. Ефикасен механизъм за противодействие на застрахователно-техническия риск е непропорционалното презастраховане, при което застрахователите прехвърлят (цедират) част от отговорността си на друг застраховател (презастраховател). По схемите на excess of loss и stop-loss цедираната част от отговорността е обикновено горницата над възможностите на цеданта или над неговата застрахователна отговорност. Така той би могъл да оперира с по-ограничени резерви, но с по-ликвидни активи, докато презастрахователят може да си позволи по-ниска ликвидност на активите и да търси по-висока доходност от инвестициите, тъй като неговото привличане в плащанията на цеданта е по-скоро изключение.

Модели на риска и добавката за сигурност

Калкулациите за намиране на точния размер на добавката за сигурност са една от основните задачи на актюерството в теоретичен план и за решаването на съответните проблеми се търсят различни модели на риска. През последните години в научните среди се отделя особено внимание на такива модели и тяхното приложение във финансовите организации и застрахователните дружества с цел да се изяснят общите им теоретични и методологически принципи и да се постигне по-голяма прозрачност, обоснованост и надеждност при оценката, прогнозирането и управлението на риска. Във връзка с това в Европейския съюз по инициатива на Европейската комисия се разработва проект Solvency II по проблемите на риска и платежоспособността на застрахователните дружества. Проектът е аналогичен и донякъде паралелен на инициативите на Базелския комитет и споразумението Basel II Accord, засягащо банковия сектор.

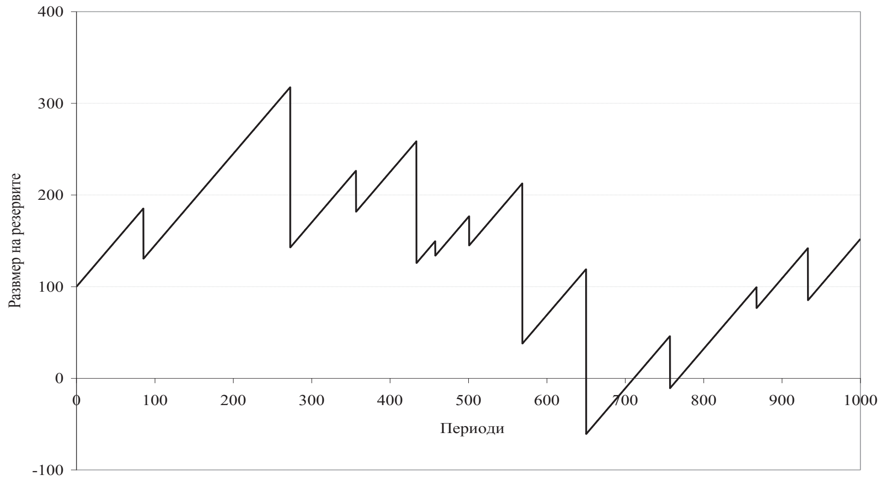
Една от водещите идеи на проекта Solvency II е свързана с използването на модели на риска с оглед на неговата оценка, прогноза и управление във всички направления и подсистеми на застраховането, с което да бъдат по-добре защитени интересите на застрахованите чрез изграждането на по-съвременна регулаторна рамка и да се постигне по-висока капиталова адекватност и стабилност на застрахователния отрасъл. В хода на разработването на проекта са констатирани значителни различия в практиката на страните - членки на ЕС по използването на модели на риска, както и между самите застрахователни компании в отделните страни. Вниманието се привлича върху необходимостта от намирането на общите методологически принципи, подходи и алгоритми за тяхното проектиране, изграждане и практическо приложение.

В редица други области на човешката дейност отчитането и отмерването на рисковете е също от първостепенна важност. Метеорологичните прогнози стават особено актуални по време на прибирането на реколтата, в критичните фази на големи строителни обекти, при подготовката на космически полети и др. В Министерството на енергетиката на САЩ например има актюерски екип, изследващ риска, свързан с ядрените опити, съхранението на ядрените оръжия и въобще с разпространението на средствата за масово поражение. В редица държави се прилагат актюерски методи при изучаването на риска от отпадане на подрастващите от образователната система.

Като модели на риска най-разпространени са тези,[4] представящи риска като процес на непрекъснато постъпващи премийни приходи, срещу което противостои натрупване на плащанията на застрахователите с хода на времето. Такъв процес е представен схематично на фиг. 2. Диагоналните линии отговарят на равномерно постъпващи премии, с което се увеличават резервите. Възникващите искове със случаен размер и на случайни дати предизвикват съответен спад в резервите и са изобразени с вертикалните отсечки. Застрахователно-техническият риск се формира от неочаквано по-висока честота на исковете или от появата на тежки искове. На фиг. 2 се вижда такъв пример, когато около периода 650 поредният иск с необичайна големина предизвиква криза във финансите на застрахователя и резервите спадат под определено критично ниво.[5]

Фигура 2

Развитие на резервите на застрахователите



При някои допълнителни допускания, помощни хипотези и опростявания такива модели водят до определяне на добавката за сигурност като абсолютна величина в следната форма:

(18) $$\gamma - \lambda\mu,$$

където γ е темпът, с който постъпват премиите, μ - средният размер на исковете като математическо очакване за тяхната тежина и λ - интензитетът

[4] Обикновено срещани в специализираната литература като колективни модели на риска от вида на модела на Крамер-Лундберг (Cramer 1955; Cunningham 2005: 540-552; Bowers 1997: 367-422).

[5] В специализираната литература такива кризисни моменти често се означават като колапс на резервите (Cunningham, 2005, p. 540-552).

на исковете като математическо очакване за тяхната честота. Като относителна величина добавката за сигурност е:

$$\rho = \frac{\gamma - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{\gamma}{\lambda\mu} - 1. \tag{19}$$

Добавката за сигурност се намира в различни оценки за големината на застрахователно-техническия риск. За вероятността от възникване на срив в платежоспособността на застрахователите от вида на фиг. 2 дори и при положителен размер на добавката за сигурност се получава:

$$\frac{\lambda\mu}{\gamma}\exp\left(-\frac{\gamma - \lambda\mu}{\gamma\mu}R_0\right), \tag{20}$$

където R_0 е началният размер на резервите. Тази формула, представена чрез относителната добавка за сигурност, е:

$$\frac{1}{1+\rho}\exp\left(-\frac{\rho R_0}{\mu(1+\rho)}\right). \tag{21}$$

Формула (21) показва, че ако не се начислява такава добавка, т.е. $\rho = 0,$ сривът в резервите е неизбежен (с вероятност точно равна на 100%), независимо от това какъв е началният им размер.

При $\rho > 0$ възможността за подобен срив все пак остава, но вероятността това да се случи е под 100% и намалява с по-висока добавка за сигурност или с повече начални резерви, като така се отдалечава и смалява застрахователно-техническият риск. По-висока добавка обаче оскъпява застрахователните продукти и е бариера пред пласирането им на пазара. Затова по-перспективно е натрупването на резерви, което се потвърждава и на практика.

Още по-проста формула се получава за вероятността сривът в резервите да ги доведе под началното ниво $R_0,$ каквито случаи се откриват на фиг. 2 на три дати (около периодите 570, 650 и 930):

$$\frac{1}{1+\rho}. \tag{22}$$

Забележителното в този резултат е, че наподобява 21), като че ли там е заместено $R_0 = 0.$ Вследствие на това вероятността (22) въобще не зависи от първоначалния размер на резервите. Какъвто и да е той, величината на (22) е една и съща и рискът за появата на такъв кризисен момент е налице независимо от големината на натрупаните резерви. Като единствен инструмент за управление на такъв риск остава размера на добавката за сигурност.

Разпределение на отговорността и премийните приходи при съзастраховане

При пропорционалното презастраховане, т.е. съзастраховането, няколко (на брой K) застрахователни компании поемат солидарно някакъв риск X с определени квоти

$$X_1 + X_2 + ... + X_K = X \tag{23}$$

или със съответните проценти от общия риск.

Може да се предположи, че застрахователите ще си поделят премийните приходи в същите пропорции, както в (23), но това би било така само ако се придържат към еднакви функции на полезност, каквото съвпадение едва ли се среща на практика.

Да допуснем, че застрахователите се ръководят от експоненциални функции на полезност от вида на (14) и съгласно това премиите за отделните застрахователи, съответно на защитения от тях дял от общия риск, биха били:

$$P_k = \frac{1}{\alpha_k} \ln E(e^{\alpha_k X_k}), \tag{24}$$

където $\alpha_k > 0$ е специфичната за отделните компании резервираност към риска $(k = 1, 2, ... K),$ породена най-вече от различните резерви, с които те разполагат. Така общият размер на премиите за целия риск би бил равен на:

$$P = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\alpha_k} \ln E(e^{\alpha_k X_k}). \tag{25}$$

Първият извод тук би трябвало да бъде, че делът от премиите за отделните компании като процент може и да не съвпада със съответния от поетата отговорност:

$$\frac{P_k}{P} \neq \frac{X_k}{X}. \tag{26}$$

Тези съзастрахователи, които покриват по-голям дял от общата отговорност $S,$ може да получат непропорционално по-висок дял от добавката за сигурност, така че, ако се спазва принципът на еквивалентност, равенство между двете страни в (26) не би трябвало да се очаква. Същевременно съзастраховател, който и без друго има вече солидно присъствие на пазара и е успял да формира обемисти застрахователни портфейли, по-лесно би постигал изравняване на плащанията и може да се задоволи с непропорционално по-ниска добавка за сигурност.

Вторият извод е, че величината на общата премия (25) зависи както от специфичната за отделните компании резервираност към риска, така и от дела на поетата от тях отговорност. На пръв поглед презастрахователите имат пълната свобода при избора на едно или друго разпределение (23) на целия риск помежду си. Така обаче би се получил един или друг размер на общата премия (25). Може да се установи математически, че минимумът за (25) се постига само при разпределение на общата отговорност по формулата

(27) $$X_k = \frac{\alpha}{\alpha_k} X, \text{ където:}$$

(28) $$\alpha = \left(\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\alpha_k} \right)^{-1}.$$

От (27) се вижда, че съзастрахователите с по-резервирано отношение към риска и респективно с по-висока стойност на съответното α_k би трябвало да покриват по-малък дял от общия риск и по такъв начин няма да натоварят общата премия P с по-голяма добавка за сигурност, в резултат от което се постига и минимумът на (25). Така разпределението на отговорността между съзастрахователите се определя преди всичко от различната им резервираност към риска, ако искат общата стойност на застраховката да бъде минимална.

Формула (28) разкрива, че величината α представлява средна хармонична на резервираността към риска при отделните компании. При това ще бъде спазено и (24) за отделните съзастрахователи, като за минималната обща премия (25) се получава:

(29) $$P = \frac{1}{\alpha} \ln E(e^{\alpha X}),$$

като че ли съзастрахователите са всъщност една компания с експоненциална функция на полезност и някаква средна резервираност към риска.

*

В някои случаи обаче законът за намаляващата пределна полезност може и да не е в сила. При такова положение профилът на функциите на полезност може да се окаже доста по-различен, дори да се окажат изпъкнали вместо вдлъбнати. Като модел на отношението към риска подобни изпъкнали функции на полезност отговарят на лице, търсещо случайност и готово да размени сигурност срещу случайност, за разлика от обичайното отношение към риска, където стремежът е към обратното – да се размени случайност срещу сигурност, т.е. да прехвърли случайността на друг срещу заплащане. Такова поведение често се схваща като авантюристично, характерно за пристрастеност към хазарта, но може да се свърже в определена степен и с всяка инвестиция, тъй като срещу авансирания капитал се очаква някаква доходност, която съвсем не е сигурна.

Може да се постави въпросът дали застрахователите не са подобни авантюристи, след като акумулират върху себе си риска от отделните полици и се натоварват с огромен комплекс от случайности. Разликата между тях би трябвало да е очевидна – авантюристите фактически купуват случайност и съответни рискове, докато при застрахователите е обратното – срещу получените случайности и рискове те получават пари – премиите по отделните полици. Освен това застрахователите се стремят да ограничат натрупания при тях застрахователно-технически риск, като ползват методите на финансовата математика, статистиката и други сродни научни дисциплини. Те имат вековен опит в тази насока, докато при поведението на авантюристите е обратното. Поведението на инвеститорите е подобно на това на застрахователите – търсят по-висока доходност, но само ако случайността в крайния изход е в определени граници и рискът от загуби е възможно най-малък.

Използвана литература:

Драганов, Хр., Й. Близнаков (2000). Застраховане. С.: “Тракия-М”.

Кендалл, М., А. Стьюарт (1966). Теория распределений. Москва: “Наука”.

Феллер, В. (1984). Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Москва: “Мир”.

Чолаков, Н. (2011). Финансова математика. С.: ВУЗФ.

Arrow, K. J. (1965, 1971). The theory of risk aversion. Essays in the Theory of Risk Bearing. Chicago: Markham Publ. Co..

Bowers, N. et al. (1997). Actuarial Mathematics, Schaumburg IL: The Society of Actuaries.

Carmona, R. (2009). Indifference Pricing: Theory and Applications. Princeton University Press.

Cramer, H. (1955). Collective Risk Theory. Skandia Jubilee Volume, Stockholm.

Cunningham, R. et al. (2005). Models for Quantifying Risk, Winstead, Conn: ACTEX Publications.

Gerber, H. (1979). An Introduction to Mathematical Risk Theory. Philadelphia: Huebner Foundation.

Pratt, J. W. (1964). Risk aversion in the small and in the large. - Econometrica 32, January-April.

21.XI.2012 г.